



2024

ملزمة

الجبر والإحصاء

الترم الأول

الصف الثالث الإعدادي



إعداد أ/ محمود عوض حسن

تساوى زوجين مرتبين

• **الزوج المرتب:** (أ ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ : المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب : المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

◆ (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) فمثلا (٢ ، ٥) ≠ (٥ ، ٢)

◆ (١ ، ٣) يسمى زوج مرتب بينما {١ ، ٣} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا : إذا كان (س ، ص) = (٥ ، ٣) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا : إذا كان (س – ٢ ، ١٠) = (٧ ، ص+٢)

فإن س – ٢ = ٧ ⬅ س = ٩ ، ص+٢ = ١٠ ⬅ ص = ٨

مثال ١

إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣)

فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س}+٢\text{ص}}$

الحل

س – ١ = ٨ ∴ س = ٩

ص + ٣ = ١١ ∴ ص = ٨

∴ $\sqrt{\text{س}+٢\text{ص}} = \sqrt{٩+٢\times٨}$

$= \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال 2

إذا كانت ($\text{س}^{٥}$ ، ص+١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{س}^{٥} = ٣٢$ ∴ $\text{س}^{٥} = ٢^{٥}$

∴ س = ٢

ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ ∴ ص + ١ = ٣

∴ ص = ٢

تدريب

إذا كانت: (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب – ١)

فإن أ = ... ، ب = ...

إعداد أ/ محمود عوض



حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين س، ص

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين س ، ص يكتب س × ص ويقرأ س ضرب ص
- س × ص : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمى للمجموعة س ومسقطها الثانى ينتمى للمجموعة ص.

أي أن: س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

- فمثلا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن : س × ص = {١ ، ٣} × {٢ ، ٤ ، ٦}

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

بينما ص × س = {٢ ، ٤ ، ٦} × {١ ، ٣}

= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) }

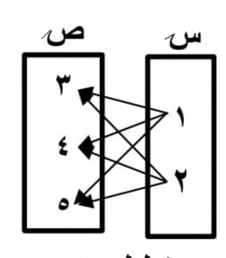
- لاحظ أن : س × ص ≠ ص × س
- يمكن تمثيل س × ص كمخطط سهمى ومخطط بيانى كما في المثال التالى.

محمود عوض
معلم أول رياضيات

مثال إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

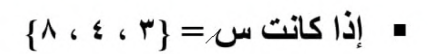
فأوجد س × ص ومثله بمخطط سهمى وآخر بياني

الحل : س × ص = { (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) }



مخطط سهمى

مخطط بيانى



حاصل الضرب الديكارتي س × س أو س²

- إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٨}

فإن : س × س أو س² = {٣ ، ٤ ، ٨} × {٣ ، ٤ ، ٨}

= { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٨) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٨) ، (٨،٣) ، (٨،٤) ، (٨،٨) }



عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- إذا كانت سـ = {٢ ، ٥} فإن عدد عناصر سـ = ٢ وتكتب ن (سـ) = ٢
- إذا كانت صـ = {٤} فإن ن (صـ) = ١ وليس ٤

القاعدة: ن (سـ × صـ) = ن (سـ) × ن (صـ)

فمثلا: إذا كانت ن (سـ) = ٤ ، ن (صـ) = ٥ فإن ن (سـ × صـ) = ٤ × ٥ = ٢٠

أيضا: إذا كانت سـ = {١ ، ٣} ، صـ = {٢ ، ٤ ، ٦} فإن ن (سـ × صـ) = ٢ × ٣ = ٦

العمليات على المجموعات

إذا كانت سـ = {٢ ، ٣} ، صـ = {٣ ، ٤ ، ٥} فإن:

- **التقاطع ∩** : سـ ∩ صـ = { ٣ } ← خد المكرر
- **الاتحاد ∪** : سـ ∪ صـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← خد الكل ، والمكرر مرة واحدة
- **الفرق ــ** : سـ ــ صـ = { ٢ } ← خد الموجود في س ومش موجود في ص

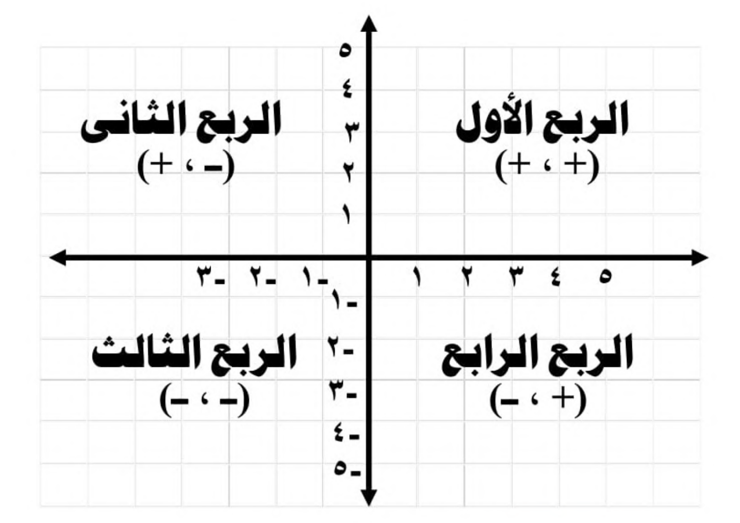
  صـ ــ سـ = {٤ ، ٥} ← خد الموجود في ص ومش موجود في س

الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبعة التربيعية إلى ٤ أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتى إحداثييها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثى السينى = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل (٠ ، ٣)
- إذا كان الإحداثى الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل (٢ ، ٠)

مثال

- النقطة (٥ ، ٢) تقع في الربع الأول
- النقطة (-٢ ، ٣) تقع في الربع الثاني
- النقطة (-٣ ، -٤) تقع في الربع الثالث
- النقطة (١ ، -٣) تقع في الربع الرابع
- النقطة (٠ ، ٢) تقع على محور الصادات
- النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور السينات
- النقطة (٠ ، ٠) تسمى نقطة الأصل "و"



تدريب

- النقطة (٣ ، -٢) تقع ....
- النقطة (-٥ ، ٦) تقع ....
- النقطة (-٤ ، -٧) تقع ....
- النقطة (٠ ، -٢) تقع ....
- النقطة (٥ ، ٠) تقع ....
- النقطة (٣ ، ٤) تقع ....

أمثلة محلولة

١ إذا كانت س × ص = { (٢،٢) ، (٢،٥) ، (٢،٧) }

أوجد : ١) ص ٢) ص × س

٣) ن (ص^٢)

الحل

- ص = { ٢ ، ٥ ، ٧ }
- ص × س = { (٢،٢) ،(٥،٢) ،(٧،٢) }
- ن (ص^٢) = ٣ × ٣ = ٩

٢ إذا كانت س = {٣،٤} ، ص = { ٤،٥ }

، ع = { ٦،٥ } فأوجد :

١) س × (ص∩ع) ٢) (س ـ ص) × ع

الحل

التجهيز: (ص ∩ ع) = { ٥ } ، س ـ ص = { ٣ }

- س × (ص∩ع) = {٣،٤} × { ٥ }
  = { (٣،٥) ،(٤،٥) }
- (س ـ ص) × ع = { ٣ } × { ٦،٥ }
  = { (٣،٦) ،(٣،٥) }

٣ إذا كانت س = {٢،٥} ، ص = { ١،٢ }

، ع = { ٣ } فأوجد :

١) ن (س × ع) ٢) (ص ∩ س) × ع

الحل

١ ن (س×ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢×١ = ٢

٢ التجهيز: (ص ∩ س) = { ٢ }

(ص ∩ س) × ع = { ٢ } × { ٣ } = { (٢،٣) }

٤ إذا كانت س = {١،٥،٦} ، ص = { ٢،٤،٥ }

فأوجد : ١) ص × س ومثله بمخطط سهمي

٢) ن (س × ص)

الحل

١ ص × س = { (٢،١) ،(٢،٥) ،(٢،٦) ، (٤،١) ، (٤،٥) ، (٤،٦) ، (٥،١) ، (٥،٥) ، (٥،٦) }

مثل المخطط بنفسك

٢ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٣×٣ = ٩

٥ إذا كانت س = {٢،٣} ص = { ٣،٤،٥ }

فأوجد : ١) س × ص

٢) (س × ص) ∩ ص^٢

الحل

١ س × ص = { (٢،٣) ،(٢،٤) ،(٢،٥) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٢ ص^٢ = { (٣،٣) ،(٣،٤) ،(٣،٥) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٥) ، (٥،٣) ، (٥،٤) ، (٥،٥) }

(س × ص) ∩ ص^٢ = { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٦ إذا كانت س = {٢،-١} ص = { ٤،٠ }

، ع = { ٤،٥،-٢ } فأوجد :

فأوجد : ١) س × ص ٢) س ^٢

٣) ن (س × ع) ٤) ن (ع^٢) ٥) ن(ص^٢)

الحل

١ س × ص = { (٢،٤) ،(٢،٠) ،(-١،٤) ، (-١،٠) }

٢ س^٢ = { (٢،٢) ،(٢،-١) ،(-١،٢) ، (-١،-١) }

٣ ن (س × ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢ × ٣ = ٦

٤ ن (ع^٢) = ن (ع) × ن (ع) = ٣ × ٣ = ٩

٥ ن (ص^٢) = ن (ص) × ن (ص) = ٢ × ٢ = ٤

إعداد أ/ محمود عوض



العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج **بيان العلاقة** من أزواج الضرب الديكارتي حسب **شرط** معين يعطى لك في المسألة
- **المقصود بجملة أ ع ب** : أي علاقة أ ، ب حيث أ هى المسقط الأول ، ب هي المسقط الثانى في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول ∋ س ، المسقط الثانى ب ∋ ص

مثال ١

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٥

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج اللى ينطبق عليها الشرط أ + ب = ٥ يعنى المسقط الأول + المسقط الثانى = ٥

بيان ع = { (١،٤)، (٣،٢)، (٤،١) }

س	ص
١	١
٣	٢
٤	٣
	٤
	٥

(١ ← ٤ ، ٣ ← ٢ ، ٤ ← ١)

تدريب

إذا كانت س = { ٢، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ = $\frac{١}{٢}$ ب

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

الحل

اختر الأزواج اللى فيها المسقط الأول نصف الثانى

بيان ع =

متي تكون العلاقة دالة ؟!

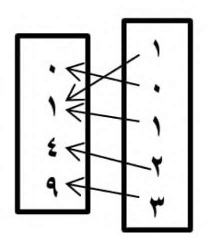
- يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتى:
  - ❖ **إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط** (في بيان ع)
  - ❖ **أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط** (في المخطط السهمى)
- إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثانى في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

١

إذا كانت س = { -١، ٠، ١، ٢، ٣}،
ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^٢$ = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع = { (-١،١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢،٤)، (٣،٩) }



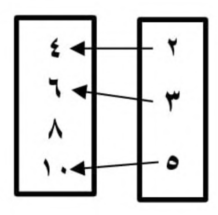
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط.
  أو لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط.
- المدى = { ٠، ١، ٤، ٩ }

٢

إذا كانت س = { ٢، ٣، ٥ } ،
ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " ٢أ = ب "
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (٢،٤)، (٣،٦)، (٥،١٠) }



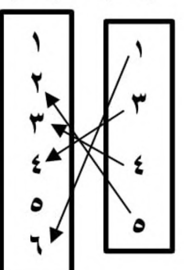
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط.
- المدى = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }

٣

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٧
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (١،٦)، (٣،٤)، (٤،٣)، (٥،٢) }

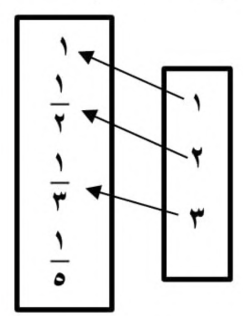


- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط.
- المدى = { ٢، ٣، ٤، ٦ }

٤

إذا كانت س = { ١، ٢، ٣} ، ص = { ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

بيان ع= { (١،١)، (٢ ، $\frac{١}{٢}$)، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) }



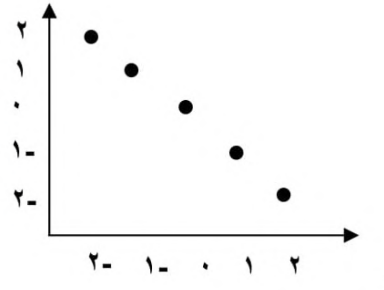
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط.
- المدى = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

٥

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }
وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ معكوس جمعي للعدد ب
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان ع = { (-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢) }



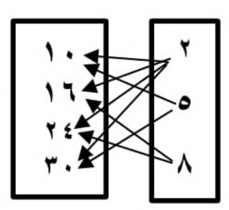
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س ظهر في بيان ع كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ }

٦

إذا كانت س = { ٢، ٥ ، ٨ } ،
ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.هل ع دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (٢،١٠)، (٢،١٦)، (٢،٢٤)، (٢،٣٠)، (٥،١٠)، (٥،٣٠)، (٨،١٦)، (٨،٢٤) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٥ } ،
وكانت ع علاقة معرفة على س
وكان بيان ع = { (أ ، ٣)، (ب ، ١)، (١ ، ٥) }
١) أوجد مدى الدالة
٢) أوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثانى

المدى = { ٣ ، ١ ، ٥ }

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..
العنصر ١ ظهر يبقى أ ، ب هما ٣ ، ٥

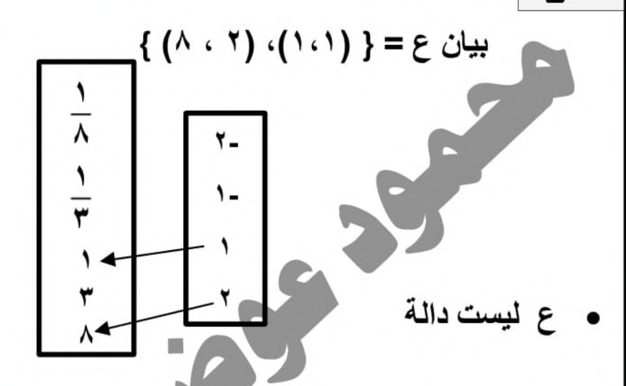
أ + ب = ٣ + ٥ = ٨

٨

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ }،
ص = { $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ^{٣} = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (١،١)، (٢ ، ٨) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س لم يخرج منه أسهم.

إعداد أ/ محمود عوض



الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ⟵ ص ويكون :

❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س

❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص

❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)

- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س + ١ ، د(س) = $س^٢$ +٢س – ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س)= ص

مثال ١

إذا كانت د: س ⟵ ص ، س = { ٣، ٥ ، ٧} ، ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) }

فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل ٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

الحل

١- مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

٢- المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

٣- مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }

٤- قاعدة الدالة هي : د (س) = ٣س

مثال ٢

إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }

فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة

٢- قاعدة الدالة

◆ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

◆ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

◆ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في $س^٢$ نضع العدد بين قوسين فمثلا إذا كانت س = -٣ فإن $س^٢$ = $(-٣)^٢$ = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما **ويمكن الاستعانة بالآتى:**

١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمى لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥

٢ إذا كان د (٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧

مسائل على التعويض فى الدالة

١ إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥

أوجد قيمة ب

الحل

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن س = ٣ الناتج هيساوى ١٥

٤ × ٣ + ب = ١٥

١٢ + ب = ١٥ ∴ ب = ٣

٢ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٤س ـ ٥

فأوجد قيمة أ

الحل

من الزوج (أ ، ٣) نأخذ س = أ ، د (س) = ٣

بالتعويض في الدالة

∴ ٣ = ٤ أ ـ ٥

٤ أ = ٣ + ٥ ⟸ ٤ أ = ٨

∴ أ = ٢

٣ إذا كانت د (س) = س^{٢} ـ ٣س ، ر (س) = س ـ ٣

فأوجد د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$)

الحل

د ($\sqrt{٢}$) = ($\sqrt{٢}$)^{٢} ـ ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$

ر ($\sqrt{٢}$) = $\sqrt{٢}$ ـ ٣

٣ ر ($\sqrt{٢}$) = ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩

د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$) = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩ = ـ ٧

٤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٦س ـ أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠

من الزوج (ب ، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص = ٣

٣ = ٦ × ٠ ـ أ ⟸ ٣ = ٠ ـ أ

ـ أ = ٣ ⟸ أ = ٣

٥ إذا كانت س = { ٠، ١، ٣ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧ }

وكانت د : س ⟵ ص حيث د (س) = ٥ ـ س

فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

الحل

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س

د (٠) = ٥ ـ ٠ = ٥

د(١) = ٥ ـ ١ = ٤

د (٣) = ٥ ـ ٣ = ٢

∴ صور عناصر س (هي المدى) = { ٥ ، ٤ ، ٢ }

إذا كانت س = { ٢، ٣، ٤ } ، ص = { ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ }

وكانت د : س ⟵ ص حيث د (س) = ٩ ـ س

فأوجد بيان الدالة د ثم أوجد المدى .

الحل

نعوض في الدالة د(س) = ٩ ـ س عن قيم المجموعة س

د (٢) = ٩ ـ ٢ = ٧

د(٣) = ٩ ـ ٣ = ٦

د (٤) = ٩ ـ ٤ = ٥

بيان د = { (٢،٧) ، (٣،٦) ، (٤،٥) }

المدى = { ٧ ، ٦ ، ٥ }

٤ دوال كثيرات الحدود

◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

1. كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح
2. أسس المتغير س ∋ ط ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ **أمثلة لدوال كثيرات حدود:**

مثل: د(س) = ٢س + ١ ، د(س)= س^{٢} + ٣س – ٢ ، د(س) = س^{٣} – ٨

◆ **أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :**

مثل: د(س)= س^{٢} + $\sqrt{\text{س}}$ + ٨ ، د(س) = س (س + $\frac{١}{\text{س}}$ + ٢)

درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د: د(س) = س^{٤} + ٢س^{٣} + ٥ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د: د(س) = س^{٢} + ٢س - ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د: د(س) = س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د: د(س) = ٧ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال ١: الدالة د: د(س) = س^{٢} (س + ٢) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = س^{٣} + ٢س ∴ د دالة من الدرجة الثالثة

مثال ٢: الدالة د: د(س) = س^{٢} – (س^{٢} – ٣س + ١) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = س^{٢} – س^{٢} + ٣س – ١ = ٣س + ١ ∴ د دالة من الدرجة الأولى

مثال ١

إذا كان د(س) = س^{٢} – س + ٣

فأوجد : د(-٢) ، د(٠) ، د($\sqrt{٣}$)

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (-٢) = (-٢)^{٢} – -٢ + ٣ = ١١

د (٠) = ٠^{٢} – ٠ + ٣ = ٣

د ($\sqrt{٣}$) = ($\sqrt{٣}$)^{٢} – $\sqrt{٣}$ + ٣

= ٩ – $\sqrt{٣}$ + ٣ = ١٢ – $\sqrt{٣}$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} – ٥س + ٢

١) اذكر درجة الدالة د

٢) اثبت أن د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الحل

- الدالة د من الدرجة الثانية
- د (٢) = ٢ × ٢^{٢} – ٥ × ٢ + ٢ = صفر

د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × ($\frac{١}{٢}$)^{٢} – ٥× $\frac{١}{٢}$ + ٢ = صفر

∴ د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الدالة الخطية

إعداد أ/ محمود عوض

◆ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة **الأولى**

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س – ١ ، د(س) = ٥س +٣

◆ تكون على الصورة د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠ وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

- ➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)
- ➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

فمثلا: إذا كانت د: د(س) = ٢س – ٥ فإن أ = ٢ ، ب = –٥ ومنها فإن :

- ➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، –٥)
- ➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)

◆ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠
و نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ⟸ نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ⟸ نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣ س – ١
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحل

في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم للـ س

س	٣س – ١	ص
٠	٣ × ٠ – ١	-١
١	٣ × ١ – ١	٢
٢	٣ × ٢ – ١	٥

من قاعدة الدالة: أ = ٣ ، ب = –١

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) هى ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ب) هى (٠ ، -١)

تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ٢ س – ٣

وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحـل

س	٢س – ٣	ص

الدالة الثابتة

❖ الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∋ ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د (س) = ٧ ، د (س) = ٥ ، د (س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (١) = ٥ ، د (٥) = ٥ ، د (-٥) = ٥ ، د (٠) = ٥ وهكذا

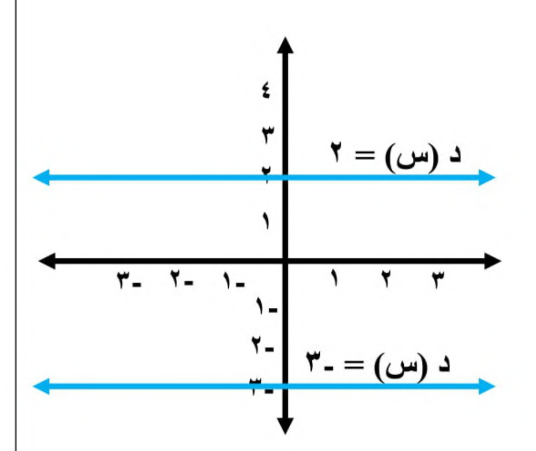
فمثلا: إذا كانت د (س) = ٧ فإن د(٣) + د (-٣) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات

◆ **مثال١: مثل بيانيا الدالة د (س) = ٢**

◆ **مثال٢: مثل بيانيا الدالة د (س) = -٣**





الدالة التربيعية

إعداد أ/ محمود عوض

❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح ⟵ ح حيث د(س) = أ س^2 + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية

مثل: د(س) = س^2 ، د(س) = ـ س^2 ، د(س) = س^2 ـ ٥ ، د(س) = س^2 ـ ٢ س +١

ملاحظات هامة

١) إذا كان معامل س^2 موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

٢) إذا كان معامل س^2 سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

٣) رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة د(س) = أ س^2 + ب س + جـ بالقانون:

نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

٤) من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة العظمى أو الصغرى

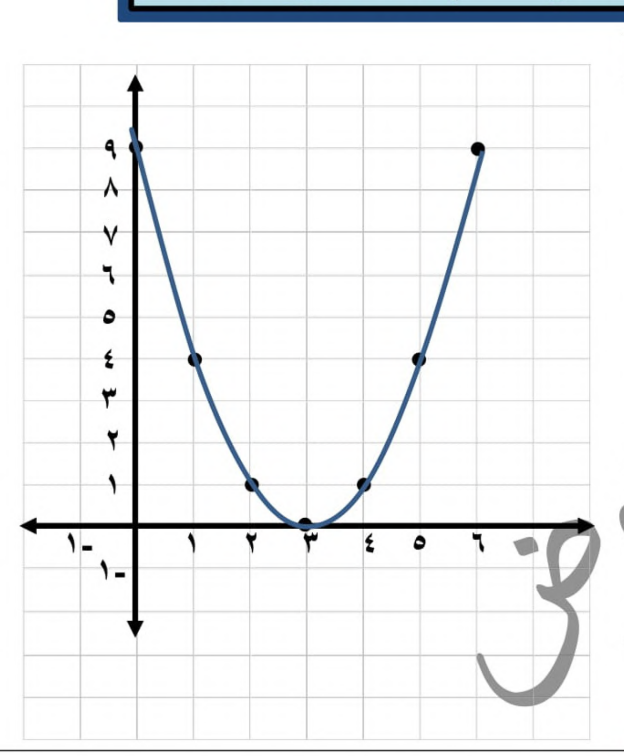
مثال ١ مثل بيانيا الدالة د(س) = (س ـ ٣)^2 متخذاً س ∋ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	(س ـ ٣)^2	ص
٠	(٠ ـ ٣)^2	٩
١	(١ ـ ٣)^2	٤
٢	(٢ ـ ٣)^2	١
٣	(٣ ـ ٣)^2	٠
٤	(٤ ـ ٣)^2	١
٥	(٥ ـ ٣)^2	٤
٦	(٦ ـ ٣)^2	٩



رأس المنحنى = (٣ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٣

القيمة الصغرى = ٠

مثال ٢

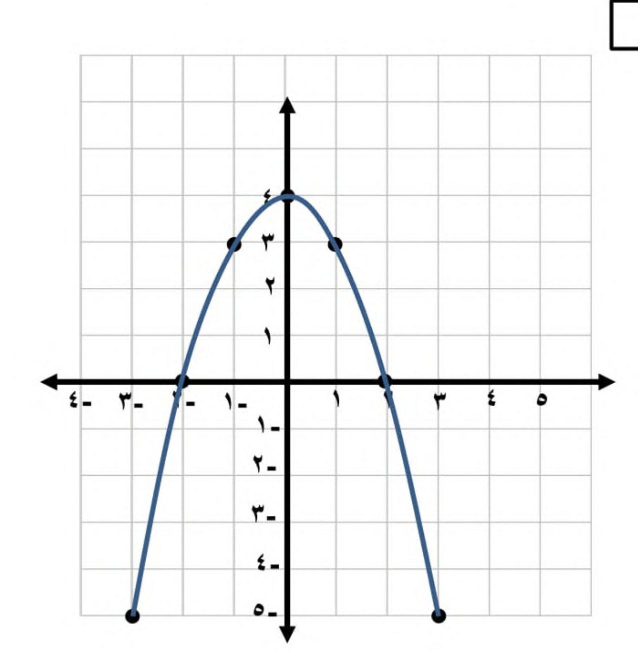
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٤ – س٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٢) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	٤ – س٢	ص
-٣	٤ – (-٣)٢	-٥
-٢	٤ – (-٢)٢	٠
-١	٤ – (-١)٢	٣
٠	٤ – (٠)٢	٤
١	٤ – (١)٢	٣
٢	٤ – (٢)٢	٠
٣	٤ – (٣)٢	-٥



رأس المنحنى = (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى = ٤

مثال ٣

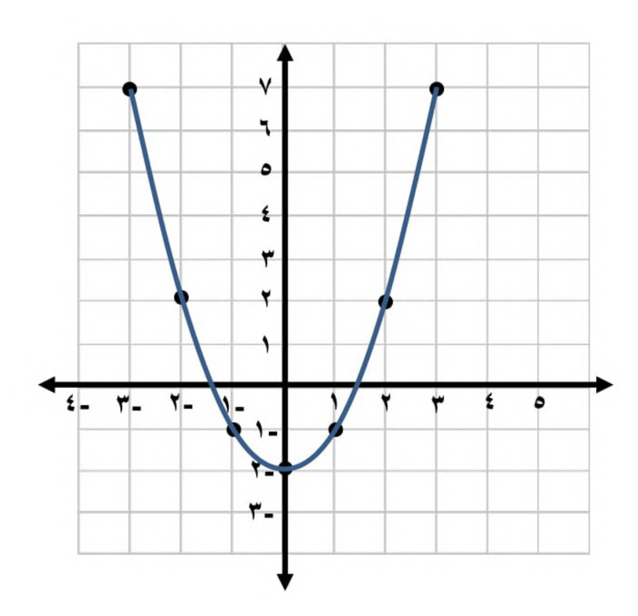
مثل بيانيا الدالة د(س) = س٢ – ٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٣) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	س٢ – ٢	ص
-٣	(-٣)٢ – ٢	٧
-٢	(-٢)٢ – ٢	٢
-١	(-١)٢ – ٢	-١
٠	(٠)٢ – ٢	-٢
١	(١)٢ – ٢	-١
٢	(٢)٢ – ٢	٢
٣	(٣)٢ – ٢	٧



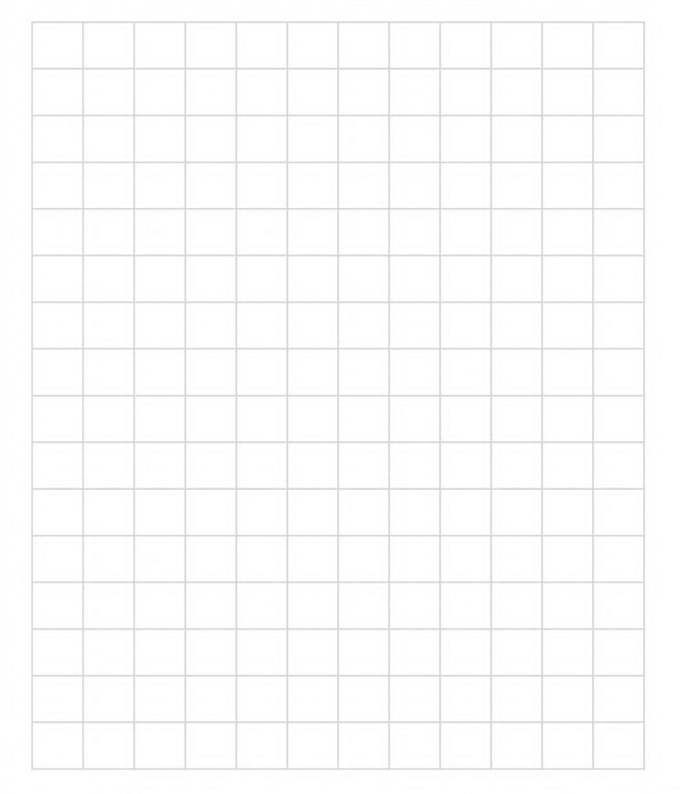
رأس المنحنى = (٠ ، -٢)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = -٢

تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د(س) = $س^٢$ + ٢س + ١ متخذًا س ∋ [-٤ ، ٢]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل



س	$س^٢$ + ٢س +١	ص

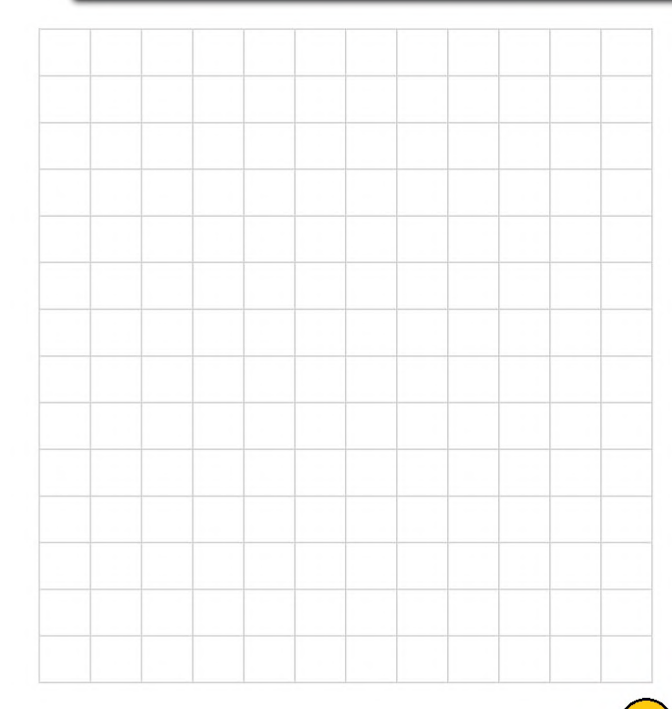
رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

تدريب ٢

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = − $س^٢$ متخذًا س ∋ [-٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل ٣)القيمة الصغرى أو العظمى



س	− $س^٢$	ص
-٣	− $(-٣)^٢$	−٩

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

أسئلة اختر على الوحدة الأولى

١ إذا كان (٢ ، س – ١) = (ص ، ٠) فإن س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢ إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣) فإن $\sqrt{\text{س+٢ص}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٥

٣ إذا كان (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨} فإن س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٤ النقطة (-٣ ، ٤) تقع فى الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع

٥ إذا كانت س = { ٢ } ، ص = { ٣ } فإن س × ص = ...

(أ) ٦ (ب) { ٣ } (جـ) (٢ ، ٣) (د) { (٢ ، ٣) }

٦ إذا كان ن (س) = ٣ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

٧ إذا كان ن (س) = ٢ ، ن (ص × س) = ٦ فإن ن (ص^{٢}) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ١٢

٨ إذا كانت ن (س^{٢}) = ٩ فإن ن (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٩ إذا كانت النقطة (س -٤ ، ٢- س) تقع فى الربع الثالث فإن س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

١٠ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

١١ إذا كانت د(س) = ٧ فإن د (-٣) = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢١ (د) -٢١

١٢ الدالة د : د(س) = ٣ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٣)

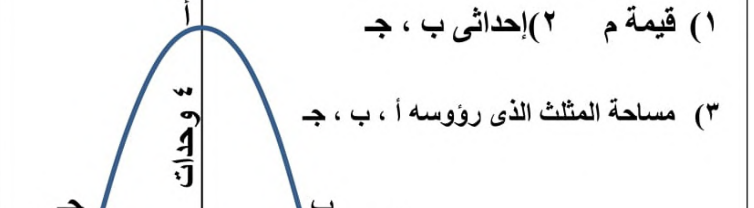
متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م – س^{٢} فإذا كان أ و = ٤ وحدات فأوجد:

١) قيمة م ٢) إحداثى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، جـ



الحل

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٤ = م – ٠^{٢} ∴ م = ٤
- إحداثى ب هو (س ، ٠) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٠ = ٤ – س^{٢} ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢
  ∴ إحداثى ب (٢ ، ٠) ، إحداثى جـ (–٢ ، ٠)
- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
  = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة

واجب على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

حاصل الضرب الديكارتى

١ إذا كانت (س ـ١ ، ٢٩) = (٤ ، ص^{٣} + ١)

فأوجد قيمة س + ٢ ص

٢ إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٥ }

، ع = { ٤ ، ٥ } فأوجد:

١) (س ـ ص) × ع ٢) ن (ع^{٢})

٣ إذا كانت س × ص = { (٢،٦) ، (٢،٩) ، (٣،٦)

، (٣،٩) ، (٥،٦) ، (٥،٩) } فأوجد:

١) س ، ص ٢) ص × س ٣) ن (س^{٢})

العلاقة

١ إذا كانت س = {١،٢،٤،٥} ، ص = {١،٤،١٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:

أ^{٢} = ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى

٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟

٢ إذا كانت س = {١،٢،٣،٤}

، ص = {ص:ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:

(أ = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى

٢) بيّن أن ع دالة وأوجد مداها؟

٣ إذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أن أ ب = ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

٢) بيّن أن ع دالة واكتب مداها

الدالة

١ إذا كان بيان الدالة د = {(١،٣) ، (٢،٥) ، (٣،٧)

، (٤،٩) ، (٥،١١)}

١) اكتب مجال ومدى الدالة د ٢) اكتب قاعدة الدالة

٢ إذا كانت د (س) = س^{٢} ـ ٣س ،

ر (س) = س ـ ٣

١) أوجد د(٢) + ر(٢)

٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر

٣ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥س + ٤

يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب)

فأوجد قيمة ب

٤ إذا كانت د (س) = ٣س + ب ، د (٤) = ١٣

فأوجد قيمة ب

٥ إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ح

حيث د (س) = ٢س + أ ، د (٣) = ٩

١) أوجد قيمة أ

٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السينى

التمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود

١ مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢س + ١ ثم أوجد نقط

تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محورى الإحداثيات

٢ ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س^{٢} + ١

متخذا س ∈ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم عين:

١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل

٣)القيمة الصغرى أو العظمى

٣ مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = ٣ ـ س^{٢}

حيث س ∈ [ـ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد:

١) معادلة محور التماثل

٢) القيمة العظمى أو الصغرى

اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب – ٥) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ إذا كان { ٢ } × { أ ، ب } = { (٢،٤) ، (٢،٣) } فإن أ ـ ب = ...

(أ) ١ (ب) ـ١ (جـ) ±١ (د) صفر

٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠،٥) (ب) (٥،٥) (جـ) (٥،٠) (د) (٠،٠)

٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص^{٢}) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى:

أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أ = $\frac{١}{٣}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى وبين أن ع دالة واكتب مداها.

ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٢

وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

السؤال الثالث:

أ) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

ب) إذا كان س × ص = { (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،٢) ، (٢،٣) }

فأوجد: ١) س ∪ ص ٢) ص^{٢}

السؤال الرابع:

أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ـ٥)

فأوجد : ١) د ($\frac{٢}{٣}$) ٢) قيمة أ

ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س^{٢} ـ ١ حيث س ∈ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج:

١) معادلة محور التماثل ٢) القيمة الصغرى للدالة

النسبة

◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب: تالى النسبة ، أ ، ب معا: حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣ + ٢}{٥ + ٢} \neq \frac{٥}{٧}$ تغيرت النسبة

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددان هما ٣م ، ٤م

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

نفرض أن العددان هما ٣م ، ٧م

∴ $\frac{٣م - ٥}{٧م - ٥} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٩م − ١٥ = ٧م − ٥

٩م − ٧م = −٥ + ١٥

٢م = ١٠ م = ٥

∴ العدد الأول = ٣م = ٣×٥ = ١٥

∴ العدد الثانى = ٧م = ٧×٥ = ٣٥

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد = س

$\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣س + ٢١ = ٢س + ٢٢

٣س − ٢س = ٢٢ − ٢١

∴ س = ١ ∴ العدد هو ١

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ مربعه = $س^٢$

$\frac{س^٢+٥}{س^٢+١١} = \frac{٣}{٥}$ (مقص)

٥$س^٢$ + ٢٥ = ٣ $س^٢$ + ٣٣

٥$س^٢$ − ٣ $س^٢$ = ٣٣ − ٢٥

٢ $س^٢$ = ٨ $س^٢$ = ٤

س = $\pm$ ٢ ∴ العدد الموجب هو ٢

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ ثلاثة أمثاله = ٣س

$\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣(٤٩ − ٣س) = ٢ (٦٩ − ٣س)

١٤٧ − ٩س = ١٣٨ − ٦س

− ٩س + ٦س = ١٣٨ − ١٤٧

− ٣س = − ٩ ∴ س = ٣

إعداد أ/ محمود عوض



التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلا : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ يسمى تناسب والكميات أ ، ب ، جـ ، د تسمى **كميات متناسبة**

◆ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث:

أ : الأول المتناسب ، ب : الثانى المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب ، د : الرابع المتناسب

أ ، د : الطرفين ، ب ، جـ : الوسطين

خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : أ × د = ب × جـ

وغالبا ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل : $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$ أو $\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحـل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

$\therefore \frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤ × س = ١٢ × ١٦

$س = \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س} + ٨}{\text{س} + ١٢}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$\text{س}^2 + ٣\text{س} + ١٢\text{س} + ٣٦ = \text{س}^2 + ٥\text{س} + ٨\text{س} + ٤٠$

$١٥\text{س} + ٣٦ = ١٣\text{س} + ٤٠$

$١٥\text{س} - ١٣\text{س} = ٤٠ - ٣٦$

$٢\text{س} = ٤$ ← $\text{س} = ٢$ ∴ العدد هو ٢

تدريب

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٢ ، ٤ ، ١٢ ، ١٨ فإنها تكون متناسبة

خاصية ٢

إذا كان أ جـ = ب د فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$ في كل طرف ثبت حاجة وانقل التانية

- مثال ١: إذا كان ٥ أ = ٧ ب فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٧}$
- مثال ٢: إذا كان ٢س − ٣ص = ٠ فإن ٢س = ٣ص ومنها $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٢}{٣}$

تدريب: إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

خاصية ٣

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالى}}{\text{تالى}}$

- مثال ١: إذا كانت أ ، ٢ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٩}$ ومنها $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٩}$
- مثال ٢: إذا كان: ٥أ ، ٢س ، ٣ب ، ٧س كميات متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

الحل: $\frac{٥\text{أ}}{٢\text{س}} = \frac{٣\text{ب}}{٧\text{س}}$ ← $\frac{٥\text{أ}}{٣\text{ب}} = \frac{٢\text{س}}{٧\text{س}}$ ∴ $\frac{٥\text{أ}}{٣\text{ب}} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢ \times ٣}{٧ \times ٥} = \frac{٦}{٣٥}$

تدريب: إذا كان: أ ، ٢ص ، ب ، ٣ص كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

خاصية ٤

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م

◆ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ = م ومنها أ = جـ م ، ب = د م

يمكن أيضا استنتاج أن : أ = ب م ، جـ = د م ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

◆ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ = ٣ م ، ب= ٥ م ومن الخطأ أن تقول أ = ٣ ، ب = ٥ وتنسى الثابت

◆ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فإن : س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م



ملاحظات

١ للتسهيل هتلغى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود **مضروبة** : مثل جـ م × جـ فقط اضرب فتكون جـ^{٢}م
- إذا كانت الحدود **متشابهة** : مثل ١٢م + ١٠م فقط اجمع فتكون ٢٢م

٢ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن أ^{٢} = ب^{٢}م^{٢} (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة نثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣جـ م - ٢جـ}}{\text{٥جـ م + ٣جـ}}$

$= \frac{\text{جـ (٣م - ٢)}}{\text{جـ (٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

الأيسر $= \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}} = \frac{\text{٣د م - ٢د}}{\text{٥د م + ٣د}}$

$= \frac{\text{د (٣م - ٢)}}{\text{د (٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{٢}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

أ = جـ م ، ب = د م

الأ يمن $= \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ م × جـ}}{\text{د م × د}} = \frac{\text{جـ}^{٢}\text{ م}}{\text{د}^{٢}\text{ م}} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{د}^{٢}}$

الأيسر $= \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ م - جـ}}{\text{د م - د}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{جـ(م - ١)}}{\text{د(م - ١)}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)^{٢} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{د}^{٢}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$

فاثبت أن : $\frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}} = \frac{١}{٢}$

الحل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}}$

$= \frac{\text{٢×٤م - ٥م}}{\text{٣×٣م - ٢×٤م + ٥م}}$

$= \frac{\text{٨م - ٥م}}{\text{٩م - ٨م + ٥م}} = \frac{\text{٣م}}{\text{٦م}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} =$ الأيسر

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فاثبت أن:

$\sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \text{٢س + ص}$

الحل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأ يمن $= \sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٣ × ٩م}^{٢} + \text{٣ × ١٦م}^{٢} + \text{٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٢٧ م}^{٢} + \text{٤٨ م}^{٢} + \text{٢٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{١٠٠ م}^{٢}} = $ ١٠ م

الأيسر = ٢س + ص = ٢ × ٣م + ٤م

= ٦م + ٤م = ١٠ م

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

أ = جـ م ، ب = د م

الطرف الأيمن = $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{د م} - \text{جـ م}}$

$= \frac{\text{جـ م}}{\text{م}\,(\text{د} - \text{جـ})} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}} =$ الأيسر

مثال ٦

إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة: $\frac{٣\text{س} + ٢\text{ص}}{٦\text{ص} - \text{س}}$

الحل

س = ٢م ، ص = ٣م

$\frac{٣\text{س} + ٢\text{ص}}{٦\text{ص} - \text{س}} = \frac{٣ \times ٢\text{م} + ٢ \times ٣\text{م}}{٦ \times ٣\text{م} - ٢\text{م}}$

$= \frac{٦\text{م} + ٦\text{م}}{١٨\text{م} - ٢\text{م}}$

$= \frac{١٢\text{م}}{١٦\text{م}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٧

إذا كان $\frac{\text{أ}^٢ - ٢\text{جـ}^٢}{\text{ب}^٢ - ٢\text{د}^٢} = \frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}^٢}$

فاثبت أن: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$\text{ب}^٢ (\text{أ}^٢ - ٢\text{جـ}^٢) = \text{أ}^٢ (\text{ب}^٢ - ٢\text{د}^٢)$

$\text{أ}^٢\text{ب}^٢ - ٢\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢\text{ب}^٢ - ٢\text{أ}^٢\text{د}^٢$

$- ٢\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = - ٢\text{أ}^٢\text{د}^٢$ (÷ −٢)

$\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢\text{د}^٢$ ثبت وانقل

∴ $\frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}^٢} = \frac{\text{جـ}^٢}{\text{د}^٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ∴ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة

مثال ٨

إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

الحل

أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

بالتعويض فى أ + ب = ٢٧,٦

∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦

١٢م = ٢٧,٦

∴ م = ٢,٣

∴ أ = ٥م = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥

ب = ٧ × ٢,٣ = ١٦,١

جـ = ٣م = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

خاصية ٥

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} =$ إحدى النسب

- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلا: يمكن ضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × –١ وضرب النسبة الثالثة × ٣ ثم بالجمع

فيكون : $\frac{٢ أ - جـ + ٣ هـ}{٢ ب - د + ٣ و} =$ إحدى النسب

- عايز تعرف هتضرب ازاى وفى كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف
- ما تيجوا نشوف !

مثال ٩

إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$

فاثبت أن : $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

الحل

عايزين نوصل للبسط اللى في الاثبات:
بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ والجمع مع الثانية

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٢ب + ٢ب - جـ} =$ إحدى النسب

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} =$ إحدى النسب ← (١)

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى × ٢
والنسبة الثانية × ٢ وجمع النسب الثلاثة

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}$

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب} =$ إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن:

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

مثال ١٠

إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$

فاثبت أن : $\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

الحل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع : النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$\frac{أ + ب + ب + جـ + جـ + أ}{٣ + ٦ + ٥} = \frac{٢أ + ٢ب + ٢جـ}{١٤}$

$= \frac{٢(أ + ب + جـ)}{١٤}$

$= \frac{أ + ب + جـ}{٧} =$ إحدى النسب ← (١)

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللى فيهم أ – النسبة الثانية

$\frac{أ + ب + جـ + أ - ب - جـ}{٣ + ٥ - ٦}$

$= \frac{٢أ}{٢} = أ =$ إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

$\frac{أ + ب + جـ}{٧} = أ \quad \therefore \quad \frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

مسألة مهمة

إذا كانت $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س

إعداد أ/ محمود عوض

التناسب المتسلسل

- إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن:
  أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب
- الوسط المتناسب بين عددين = $\pm\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

  مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ = $\pm\sqrt{٢ \times ١٨} = \pm\sqrt{٣٦} = \pm ٦$

> ❖ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$
>
> ومنها ب = جـ م ، أ = جـ $م^٢$
>
> ❖ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$
>
> ومنها جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادى في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالى

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $أ^٢ = ب^٢ م^٢$ (حط التربيع على ب ، م)

و إذا كان ب = د $م^٢$ فإن $ب^٢ = د^٢ م^٤$

و إذا كان أ = د $م^٣$ فإن $أ^٢ = د^٢ م^٦$

مثال ١

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^٢$

الأيمن = $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٤ + جـ^٢ م^٢}{جـ^٢ م^٢ + جـ^٢}$

$= \frac{جـ^٢ م^٢ (م^٢ + ١)}{جـ^٢ (م^٢ + ١)} = م^٢$

الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{جـ^٢ - د^٢}{أ - جـ} = \frac{ب د}{أ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

∴ جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

الأيمن = $\frac{جـ^٢ - د^٢}{أ - جـ} = \frac{د^٢ م^٢ - د^٢}{د م^٣ - د م}$

$= \frac{د^٢ (م^٢ - ١)}{د م (م^٢ - ١)} = \frac{د}{م}$

الأيسر = $\frac{ب د}{أ} = \frac{د م^٢ \times د}{د م^٣} = \frac{د}{م}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{أ^2 - 3جـ^2}{ب^2 - 3د^2} = \frac{ب}{د}$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$$

$جـ = د\,م$ ، $ب = د\,م^2$ ، $أ = د\,م^3$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ^2 - 3جـ^2}{ب^2 - 3د^2} = \frac{د^2م^6 - 3د^2م^2}{د^2م^4 - 3د^2}$$

$$= \frac{د^2م^2(م^4 - 3)}{د^2(م^4 - 3)} = م^2$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{د} = \frac{د\,م^2}{د} = م^2$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{أب - جـد}{ب^2 - جـ^2} = \frac{أ + جـ}{ب}$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$$

$جـ = د\,م$ ، $ب = د\,م^2$ ، $أ = د\,م^3$

$$\text{الأيمن} = \frac{أب - جـد}{ب^2 - جـ^2} = \frac{د م^3 \times د م^2 - د م \times د}{د^2م^4 - د^2م^2}$$

$$= \frac{د^2م^5 - د^2م}{د^2م^4 - د^2م^2} = \frac{د^2م(م^4 - 1)}{د^2م^2(م^2 - 1)}$$

$$= \frac{د^2م(م^2 - 1)(م^2 + 1)}{د^2م^2(م^2 - 1)} = \frac{م^2 + 1}{م}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{أ + جـ}{ب} = \frac{د م^3 + د م}{د م^2} = \frac{د م(م^2 + 1)}{د م^2}$$

$= \frac{م^2 + 1}{م}$ ∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{ب}{ب + جـ}$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$$

$ب = جـ\,م$ ، $أ = جـ\,م^2$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{جـ م^2 - جـ م}{جـ م^2 - جـ} = \frac{جـ م(م - 1)}{جـ(م^2 - 1)}$$

$$= \frac{جـ م(م - 1)}{جـ(م - 1)(م + 1)} = \frac{م}{م + 1}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{ب + جـ} = \frac{جـ م}{جـ م + جـ} = \frac{جـ م}{جـ(م + 1)}$$

$$= \frac{م}{1 + م}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦

إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

فاثبت أن: $\frac{س\,ع}{ص^2 + ص\,ع} = \frac{س}{س + ص}$

الحل

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$$

$ص = ع\,م$ ، $س = ع\,م^2$

$$\text{الأيمن} = \frac{س\,ع}{ص^2 + ص\,ع} = \frac{ع\,م^2 \times ع}{ع^2م^2 + ع\,م \times ع}$$

$$= \frac{ع^2م^2}{ع^2م^2 + ع^2م} = \frac{ع^2م^2}{ع^2م\,(م + 1)} = \frac{م}{م + 1}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{س}{س + ص} = \frac{ع\,م^2}{ع\,م^2 + ع\,م} = \frac{ع\,م^2}{ع\,م\,(م + 1)}$$

$= \frac{م}{1 + م}$ ∴ الأيمن = الأيسر

إعداد أ/ محمود عوض

٤ التغير الطردي

♣ إذا كانت ص تتغير طرديا مع س فإنها تكتب: ص ∝ س ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص = م س	م = $\frac{ص}{س}$	$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

◆ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص ∝ س^2 فإن الثابت م = $\frac{ص}{س^2}$ والعلاقة هى ص = م س^2

◆ لإثبات أن ص ∝ س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ١ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص= ٦ عندما س = ٣ فأوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ٥

الحل

ص ∝ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س} = \frac{٦}{٣} = ٢$

العلاقة هى: ص = ٢ س

بالتعويض عن س = ٥

∴ ص = ٢ × ٥ = ١٠

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير طرديا بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

ص ∝ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س} = \frac{١٤}{٤٢} = \frac{١}{٣}$

العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

٢٠ = $\frac{١}{٣}$ س

∴ س = ٢٠ × ٣ = ٦٠

مثال ٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومترا في ٦ ساعات، فكم كيلومترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

الحل

نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز

ف$_1$ = ١٥٠ ، ز$_1$ = ٦

ف$_2$ = ؟؟ ، ز$_2$ = ١٠

ف ∝ ز ∴ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$

$\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$

∴ ف$_2$ = $\frac{١٥٠ \times ١٠}{٦}$ = ٢٥٠ كيلومتر

مثال ٤ إذا كان: $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن: ص ∝ ع

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٢١س ع – ص ع = ٧س ص – ص ع

٢١ س ع = ٧ س ص

٢١ ع = ٧ ص

ص = $\frac{٢١}{٧}$ ع

∴ ص ∝ ع

التغير العكسى

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
$\text{ص س} = \text{م}$	$\text{م} = \text{ص} \times \text{س}$	$\frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١}$

◆ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص س = م أو $\text{ص} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$

◆ لإثبات أن $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ نثبت أن ص س = ثابت

مثال ١

إذا كانت $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

الحل

$\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ ∴ ص س = م

م = ص × س = ٣ × ٢ = ٦

العلاقة هى : ص س = ٦

$\frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١}$ $\frac{٣}{\text{ص}} = \frac{١,٥}{٢}$

ص × ١,٥ = ٦ ∴ ص = ٤

مثال ٢

من بيانات الجدول التالى أجب:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

١) بين نوع التغير بين ص ، س

٢) أوجد ثابت التناسب

٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحل

١ نوع التغير عكسى (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = ص × س = ٦ × ٢ = ١٢

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص س = ١٢

ص × ٣ = ١٢ ∴ ص = ٤

مثال ٣

إذا كان : $\text{س}^٤\text{ص}^٢ - ١٤\text{س}^٢\text{ص} + ٤٩ = ٠$

فاثبت أن: $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^٢}$

الحل

بتحليل المقدار المربع الكامل

$(\text{س}^٢\text{ص} - ٧)^٢ = ٠$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$\text{س}^٢\text{ص} - ٧ = ٠$

$\text{س}^٢\text{ص} = ٧$

∴ $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^٢}$

مثال ٤

إذا كان: ص= أ-٩، $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^٢}$ وكان أ=١٨ عندما $\text{س} = \frac{٢}{٣}$

فأوجد العلاقة بين س،ص ثم استنتج قيمة ص عندما س=١

الحل

$\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^٢}$ ∴ $\text{ص س}^٢ = \text{م}$

بالتعويض عن ص = أ-٩

$(\text{أ}-٩)\,\text{س}^٢ = \text{م}$ $(١٨-٩) \times (\frac{٢}{٣})^٢ = \text{م}$

∴ $\text{م} = ٩ \times \frac{٤}{٩} = ٤$

∴ العلاقة هى $\text{ص س}^٢ = ٤$

عندما س = ١ $\text{ص} \times ١^٢ = ٤$ ص = ٤

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٧ (د) ٤ : ٧

٢ إذا كان ٥ أ ـ ٢ ب = ٠ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{٥أ}{٣ب}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) ١

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{-٩}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢س ، ب ، ٣س كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

٧ إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٤} = \frac{أ + ب}{ك}$ فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى ....

(أ) ٩ (ب) -٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن ....

(أ) س $\propto$ ص (ب) ص $\propto$ س (جـ) ٣س $\propto$ ٨ص (د) س $\propto \frac{١}{ص}$

١٠ إذا كان ص $\propto$ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦

١١ العلاقة التى تمثل تغيرا طردياً بين المتغيرين س ، ص هى ....

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

١٢ إذا كان س ص = ٧ فإن ص $\propto$ ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س ـ ٧ (جـ) س (د) س + ٧

١٣ إذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل ، فإن $س^٢ص$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٩

تعليم محمود عوض
معلم أول رياضيات

واجب على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

النسبة والتناسب

١ أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٢ عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين

٣ أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧

٤ أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة

٥ إذا كانت ٣ أ = ٢ ب فأوجد قيمة $\frac{٣أ - ب}{٢أ + ب}$

٦ إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأوجد قيمة المقدار:

$$\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$$

٧ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{٣أ - ٦جـ}{ب - ٢د} = \frac{٣أ}{ب}$

٨ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أ^٢ - جـ^٢}{ب^٢ - د^٢} = \frac{أ جـ}{ب د}$

٩ إذا كان $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$

فاثبت أن: $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

١٠ إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢جـ^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

فاثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

التناسب المتسلسل

١ إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{جـ^٢ + أ}{ب} = \frac{د^٢ + جـ}{د}$

٢ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^٣}{جـ^٢ د + د^٣}$

٣ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن $\frac{٢جـ^٢ - ٣ب^٢}{٢ب^٢ - ٣أ^٢} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$

٤ أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ١،٥،١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

التغير الطردى والعكسى

١ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢٠ عندما س= ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

٢ إذا كانت أ $\propto$ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥

فأوجد: ١) العلاقة بين أ ، ب

٢) قيمة ب عندما أ = ٤

٣ إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: ١) العلاقة بين ص ، س

٢) قيمة س عندما ص = ١٦

٤ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧

٥ إذا كانت $\frac{أ + ٢ب}{٦} = \frac{ب + ٣جـ}{٣}$ فاثبت أن أ $\propto$ جـ

اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (جـ) ±٤ (د) ±٣

٢ إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{ب - أ}{ب + أ} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٧}$ عندما ص = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ فإن ثابت التناسب = ...

(أ) ٥ (ب) ٣٥ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦

فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

ب) إذا كانت ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة $\frac{٧أ + ٩ب}{٤أ + ٢ب}$

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فاثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + جـ^٢}{جـ^٢}$

ب) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:

١) العلاقة بين ص ، س ٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

ب) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - ٢جـ}{ب - ٢د}$

انتهت الأسئلة

إعداد أ/ محمود عوض

التشتت

- التشتت هو التباعد أو الاختلاف
- من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعيارى

١ المدى

- هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

- مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو ٢٣ – ١٥ = ٨

٢ الانحراف المعيارى σ

- هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى
- الانحراف المعيارى هو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها.
- اذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف σ = صفر والمدى = صفر

حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول مكون من ٣ أعمدة
- العمود الأول س : نكتب فيه القيم التى في المسألة
- نحسب الوسط $\overline{س}$ قبل أن نملأ الجدول

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى

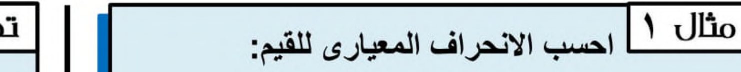
$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 ك}{\text{مجـ ك}}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجـ } (س \times ك)}{\text{مجـ ك}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول من ٦ أعمدة
- العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة
- العمود الثانى ك نكتب فيه أرقام الصف الثانى من المسألة
- نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط $\overline{س}$ ثم نكمل الجدول



مثال ١

احسب الانحراف المعيارى للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥، ٢٠ ، ٢٧

الحل

$$\text{الوسط } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

$$= \frac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$$

س	س - $\bar{\text{س}}$	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢}
١٦	١٦-٢٠ = -٤	١٦
٣٢	٣٢-٢٠ = ١٢	١٤٤
٥	٥-٢٠ = -١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠-٢٠ = ٠	٠
٢٧	٢٧-٢٠ = ٧	٤٩
مجـ	xxx	٤٣٤

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ (س- } \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣$$

مثال ٢

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س×ك	س – $\bar{\text{س}}$	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢}	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢}ك
٠	٨	صفر	٠-٢= -٢	٤	٤×٨ =٣٢
١	١٦	١٦	١-٢= -١	١	١×١٦=١٦
٢	٥٠	١٠٠	٢-٢= ٠	٠	٠×٥٠=٠
٣	٢٠	٦٠	٣-٢= ١	١	١×٢٠=٢٠
٤	٦	٢٤	٤-٢= ٢	٤	٤×٦=٢٤
مجـ	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

$$\text{الوسط } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ (س×ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ (س- } \bar{\text{س}})^{٢}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}}}$$

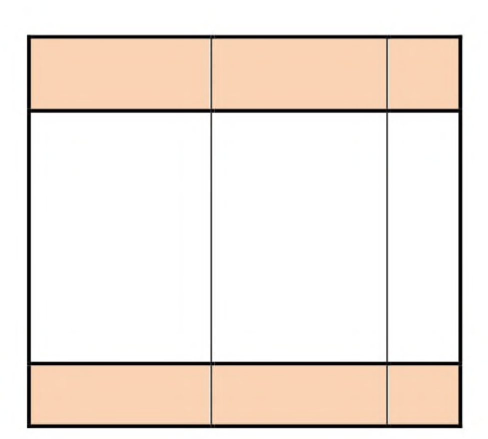
$$= \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} = ١ \text{ طفل}$$

تدريب

احسب الانحراف المعيارى للقيم:

٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل



تدريب

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س×ك	س – $\bar{\text{س}}$	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢}	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢} ك
مجـ			xx	xx	

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى ذي المجموعات

يحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعيارى للجدول التكرارى البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو :

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالى :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

مثال ٣ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعة	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$م_1 = \frac{٠ + ٤}{٢} = ٢$ ، $م_2 = \frac{٤ + ٨}{٢} = ٦$ ، $م_3 = \frac{٨ + ١٢}{٢} = ١٠$

$م_4 = \frac{١٢ + ١٦}{٢} = ١٤$ ، $م_5 = \frac{١٦ + ٢٠}{٢} = ١٨$

س	ك	س×ك	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 ك$
٢	٣	٦	-٩,٦	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	-٥,٦	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	-١,٦	٢,٥٦	١٧,٩٢
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س×ك)}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2 ك}{\text{مجـ ك}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} = ٥,٧$$

تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الكيلومترات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل

أسئلة اختر على الإحصاء

١ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(أ) المدى (ب) الوسط الحسابى (جـ) الإنحراف المعيارى (د) المنوال

٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المنوال (ب) الوسيط (جـ) الوسط (د) المدى

٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو ....

(أ) المنوال (ب) الوسيط (جـ) المدى (د) الانحراف المعيارى

٥ إذا كانت ١٨ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

واجب على الإحصاء

١ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢، ١٤ ، ١٦

٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفةالتى وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة

٣ التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع

تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) [١ ، ٣] − { ٠ ، ١ } = ...

أ)] ١ ، ٣ [ب)] ١ ، ٣] ج) [١ ، ٣] د) { ٣ }

(٢) مجموعة حل المعادلة (س − ١)^{٢} = ٩ في ح هى ....

أ) { ٤ } ب) { -٢ } ج) { ٤ ، -٢ } د) { ٣ }

(٣) إذا كانت ٢^{س} = ٤^{٣} فإن س = ...

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٦ د) ٦٤

(٤) إذا كانت $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{س} = \frac{٣}{٢}$ فإن س = ...

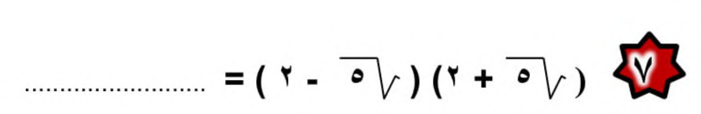
أ) ٢ ب) ٤ ج) ٣ د) $\frac{٣}{٢}$

(٥) ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ... جنيه

أ) ٢ ب) ٢,٥ ج) ٥ د) ٢٠

(٦) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .... = ...

أ) ٣ + س ب) ٣ س ج) ٣ − س د) $\frac{٣}{س}$

(٧) 

($\sqrt{٥}$ + ٢) ($\sqrt{٥}$ - ٢) = ...

أ) ٥ ب) ٣ ج) ٢ د) ١

(٨) إذا كان أ^{٢} − ب^{٢} = ١٢ ، أ + ب = ٣ فإن أ − ب = ...

أ) ٨ ب) ٤ ج) ١٥ د) ٣٦

(٩)] ١ ، ٥ [∪ { ١ ، ٥ } = ...

أ)] ١ ، ٥] ب) [١ ، ٥] ج)] ١ ، ٥ [د) [١ ، ٥]

(١٠) ح = ...

أ) ح$_{+}$ ∩ ح$_{-}$ ب) ن ∩ ن ج) ح$_{+}$ ∪ ح$_{-}$ د) ن ∪ ن

(١١) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ب) ٦$\sqrt{٣}$ ج) ٢$\sqrt{٣}$ د) − ٢$\sqrt{٣}$

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

مدرسة مصر الخير الإعدادية بجهينة - سوهاج



إعداد
و
تصميم

محمود عوض حسن

معلم
أول
رياضيات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستينى للزاوية الحادة

- وحدات القياس الستينى للزاوية هي : الدرجة ° ، الدقيقة ′ ، الثانية ″
- الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية أي أن ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″
- في الآلة الحاسبة يستخدم مفتاح [° ′ ″] لكتابة الدرجات والدقائق والثوانى

مثال ١ اكتب الزاوية ٤٢″ ٢٤′ ٣٥° بالدرجات:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالى:

ابدأ ← [٣٥] [° ′ ″] [٢٤] [° ′ ″] [٤٢] [° ′ ″] [=] [° ′ ″]

فيكون الناتج هو ٣٥,٤١١٦٦٦٧°

مثال ٢ اكتب الزاوية ٥٤,٣٦° بالقياس الستينى:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالى: ابدأ ← [٥٤,٣٦] [=] [° ′ ″]

فيكون الناتج هو ٣٦″ ٢١′ ٥٤°

تذكر

- مجموع قياسى الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
- مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

تصميم محمود عوض – معلم رياضيات

مثال ١ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥
فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،
قياس الزاوية الثانية = ٥ م

∵ مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠

∴ ٣م + ٥م = ١٨٠ ٨م = ١٨٠ م = ٢٢,٥

قياس الزاوية الأولى = ٣م = ٣ × ٢٢,٥
= ٦٧,٥° [° ′ ″] = ٣٠′ ٦٧°

قياس الزاوية الثانية = ٥م = ٥ × ٢٢,٥
= ١١٢,٥° [° ′ ″] = ٣٠′ ١١٢°

مثال ٢ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧
فأوجد القياس الستينى لكل منها

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،
قياس الزاوية الثانية = ٤ م
قياس الزاوية الثالثة = ٧ م

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ٣م + ٤م + ٧م = ١٨٠

١٤م = ١٨٠ ∴ م = ١٢,٩

الأولى = ٣ × ١٢,٩ = ٣٨,٧ [° ′ ″] =
الثانية = ٤ × ١٢,٩ = ٥١,٦ [° ′ ″] =
الثالثة = ٧ × ١٢,٩ = ٩٠,٣ [° ′ ″] =



النسب المثلثية الأساسية

إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

يمكن حساب النسب المثلثية لأى من الزاويتين الحادتين أ ، جـ

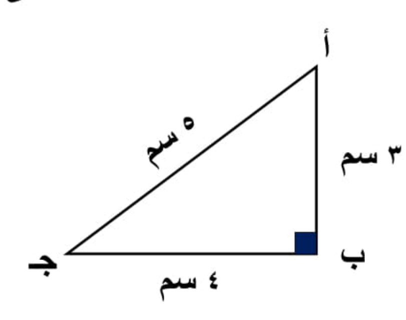
ولنأخذ الزاوية جـ كمثال :



جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$	(جيب الزاوية sin)
جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$	(جيب تمام الزاوية cos)
ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$	(ظل الزاوية tan)



◆ مثال: من الشكل المقابل:



جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{٥}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣}{٤}$ **لاحظ أن:** ظا^{٢} جـ = $(\frac{٣}{٤})^{٢}$ = $\frac{٩}{١٦}$ وهكذا

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٤}{٣}$ **لاحظ أن:** جتا^{٢} أ = $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ = $\frac{٩}{٢٥}$ وهكذا

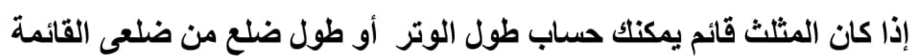
ملحوظة هامة

إذا طلب منك قياس زاوية لا بد أن تحسب جا أو جتا أو ظا للزاوية المطلوب قياسها ثم تستخدم مفتاح shift

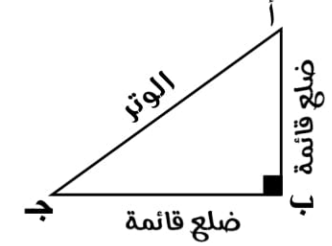
فمثلا: إذا كان جتا ب = $\frac{١}{٢}$ فإن الزاوية تحسب كتالى: $\frac{١}{٢}$ ← sin ← shift فيكون ق$(\hat{ب})$ = ٦٠°

إذا كان جا ص = $\frac{٣}{٥}$ فإن الزاوية تحسب كتالى: $\frac{٣}{٥}$ ← cos ← shift فيكون ق$(\hat{ص})$ = ٣٦,٥°

تذكير بنظرية فيثاغورث



إذا كان المثلث قائم يمكنك حساب طول الوتر أو طول ضلع من ضلعى القائمة



◆ **لحساب طول الوتر :** ربع ← اجمع ← اجذر

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ومنها أ جـ = $\sqrt{\text{الناتج}}$

◆ **لحساب طول ضلع القائمة :** ربع ← اطرح ← اجذر

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} ـ (أ ب)^{٢} ومنها ب جـ = $\sqrt{\text{الناتج}}$

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} ـ (ب جـ)^{٢} ومنها أ ب = $\sqrt{\text{الناتج}}$

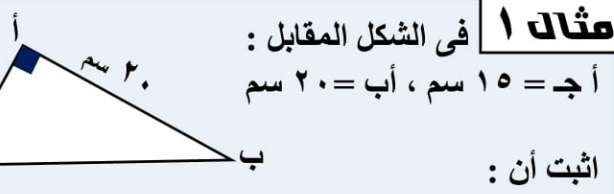
مثال ١

فى الشكل المقابل :

أ جـ = ١٥ سم ، أب = ٢٠ سم

اثبت أن :

جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب = صفر



الحل

(ب جـ)^٢ = ٢٠^٢ + ١٥^٢ = ٦٢٥

ب جـ = ٢٥ سم

الأيمن = جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب

$= \frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$

$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥}$ = صفر

مثال ٢

س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص

فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣ سم أوجد:

١) ظا س + ظا ع ٢) جتا س جتا ع – جا س جا ع

الحل

(ص ع)^٢ = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤

ص ع = ١٢ سم

١) ظا س + ظا ع = $\frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

٢) جتا س جتا ع – جا س جا ع =

$\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩}$ = صفر

مثال ٣

أ ب جـ Δ متساوى الساقين فيه

أ ب = أ جـ = ١٠ سم ،

، ب جـ = ١٢ سم

أوجد : ١) جا ب

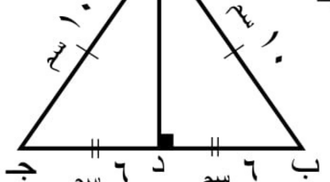
٢) ق $(\hat{ب})$ ٣) مساحة سطح Δ أ ب جـ

الحل

العمل : نرسم $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أ د}$ ينصف $\overline{ب جـ}$

∴ ب د = ٦سم



في Δ أ د ب من فيثاغورث :

(أ د)^٢ = (أ ب)^٢ – (ب د)^٢ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤

∴ أ د = ٨ سم

جا ب = $\frac{المقابل}{الوتر} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

ق$(\hat{ب})$ = $\frac{٤}{٥}$ Shift Sin =

مساحة سطح Δ = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= ٦ × ٨ = ٤٨ سم^٢

مثال ٤

في الشكل المقابل:

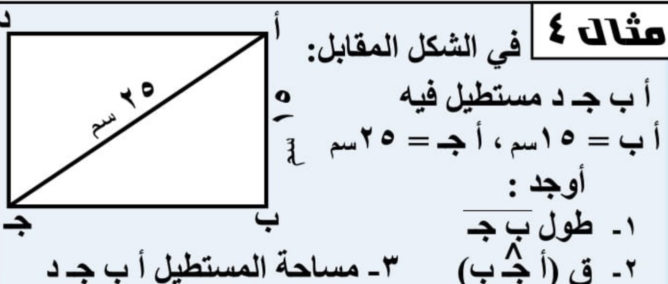
أ ب جـ د مستطيل فيه

أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم

أوجد :

١- طول $\overline{ب جـ}$

٢- ق (أ $\hat{جـ}$ ب) ٣- مساحة المستطيل أ ب جـ د



الحل

في Δ أ ب جـ من فيثاغورث :

(ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ – (أ ب)^٢

= ٦٢٥ – ٢٢٥ = ٤٠٠

∴ ب جـ = ٢٠ سم المطلوب الأول

∵ جا (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{المقابل}{الوتر} = \frac{١٥}{٢٥}$

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$ shift sin = ٣٦,٥

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ سم^٢

مثال ٥

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فيه أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

اثبت أن : $\text{جا}^2 \text{أ} + ١ = ٢ \text{ جتا}^2 \text{ جـ} + \text{جتا}^2 \text{ أ}$

الحل

$(\text{أ ب})^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$

∴ أ ب = ٦ سم

$\text{الأيمن} = \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 + ١ = \frac{٦٤}{١٠٠} + ١ = \frac{١٦٤}{١٠٠}$

$\text{الأيسر} = ٢ \times \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 + \left(\frac{٦}{١٠}\right)^2 = ٢ \times \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠}$

$= \frac{١٢٨}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{١٦٤}{١٠٠}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦

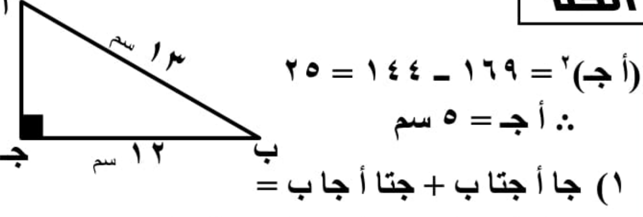
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ

حيث أب = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم

١) اثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

٢) أوجد : $١ + \text{ظا}^2 \text{أ}$

الحل



$(\text{أ جـ})^2 = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$

∴ أ جـ = ٥ سم

١) جا أ جتا ب + جتا أ جا ب =

$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}$

$= \frac{١٦٩}{١٦٩} = ١$

٢) $١ + \text{ظا}^2 \text{أ} = ١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^2 = ١ + \frac{١٤٤}{٢٥} = \frac{١٦٩}{٢٥}$

مثال ٧

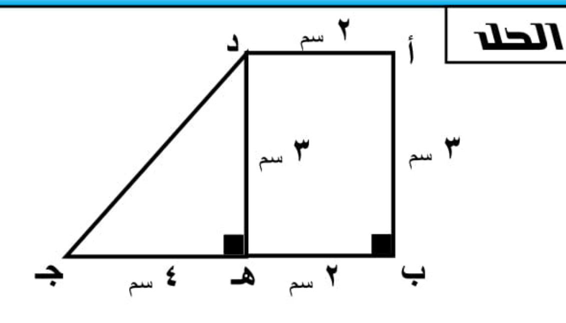
أ ب جـ د شبه منحرف فيه

$\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق $(\hat{\text{ب}}) = ٩٠°$

، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ د = ٢ سم

أوجد طول د جـ ثم أوجد قيمة جتا (ب جـ د)

الحل



العمل: نرسم $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل

د هـ = ٣ سم ، هـ جـ = ٦-٢ = ٤ سم

في Δ د هـ جـ : من فيثاغورث

$(\text{د جـ})^2 = ٣^2 + ٤^2 = ٢٥$

∴ د جـ = ٥ سم

$\text{جتا (ب جـ د)} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

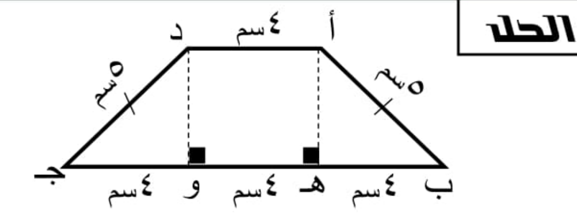
مثال ٨

أ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين فيه

$\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ د = ٤سم ،أ ب = ٥سم ،ب جـ = ١٢سم

اثبت أن : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2 \text{ جـ} + \text{جتا}^2 \text{ ب}} = ٣$

الحل



العمل: نرسم $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ الشكل أ هـ و د مستطيل

∴ هـ و = ٤ سم ، ب هـ = و جـ = ٤ سم

في Δ أ هـ ب من فيثاغورث :

$(\text{أ هـ})^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

∴ أ هـ = ٣ سم ∴ د و = ٣ سم

$\text{الأيمن} = \frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2 \text{ جـ} + \text{جتا}^2 \text{ ب}} = \frac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\left(\frac{٣}{٥}\right)^2 + \left(\frac{٤}{٥}\right)^2} = \frac{٣}{١} = ٣$

تدريبات

١ في الشكل المقابل:

س ص ع ∆ قائم في ع

س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم

١) أوجد: ظا س × طا ص

٢) اثبت أن: جا^{٢}س+جا^{٢}ص=١

الحل

٢ في الشكل المقابل:

أ ب جـ ∆ قائم في جـ

أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

١) أوجد: جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

٢) أوجد ق (بَ)

الحل

٣ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم

فأوجد قيمة جتا س جتا ع – حا س جا ع

الحل

٤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث:

أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٤ سم فأوجد قيمة:

١) ٣ ظا أ × ظا جـ ٢) جا^{٢} أ + جا^{٢} جـ

الحل

تمارين على النسب المثلثية للزاوية الحادة

١ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٣:٤

فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

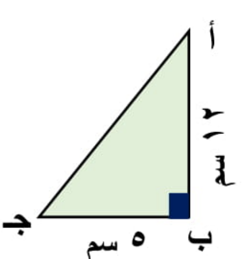
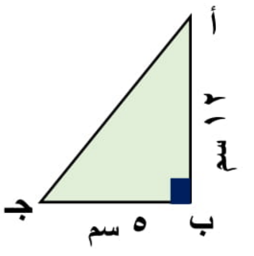
٢ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين

٢:٥ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث الداخلة

٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها بالقياس الستينى

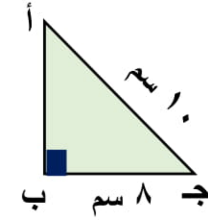
٤ في الشكل المقابل:

أوجد النسب المثلثية الأساسية

للزاويتين أ ، جـ

٥ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث قائم في ب

أ جـ = ١٠سم ، جـ ب = ٨سم

أوجد قيمة: جا جـ جتا أ + جا أ جتا جـ

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

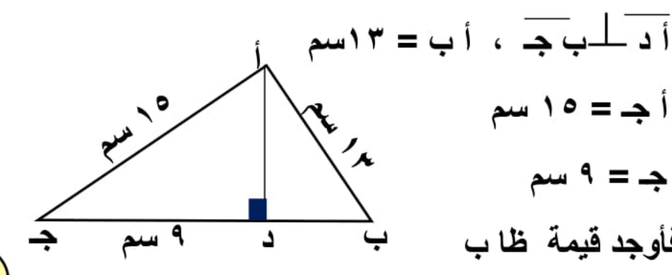
٧ في الشكل المقابل:

$\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$ ، أ ب = ١٣سم

، أ جـ = ١٥ سم

د جـ = ٩ سم

فأوجد قيمة ظا ب



٨ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مستطيل فيه

أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم

أوجد :

١) طول أ جـ

٢) قيمة : ٥ ظا (أ د جـ) – ١٣ جا (د أ جـ)

٣) مساحة المستطيل أ ب جـ د

٩ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ فيه

أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

أوجد قيمة: جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

١٠ في الشكل المقابل:

ق (أ د جـ) = ق (ب أ جـ) = ٩٠°

أ د = ٤سم ، جـ ب = ١٣سم

أوجد قيمة:

ظا (د أ جـ) جا (أجـ ب) – جا ب جتا (جـ أ د)

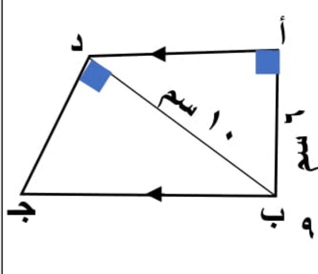
١١ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم

ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$ يقطعه في د

١) اثبت أن: جا ب + جتا جـ = $\frac{٧}{٥}$

٢) أوجد قيمة جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ

١٢ في الشكل المقابل:



أ ب جـ د شبه منحرف قائم في ب

$\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أب = ٦ سم

ب د = ١٠ سم ، ق (ب د̂ جـ) = ٩٠

أوجد ظا (أ د ب) ، طول $\overline{د جـ}$

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

الزاوية ٣٠	الزاوية ٦٠	الزاوية ٤٥
جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$	جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$	جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$	ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$	ظا ٤٥ = ١

ملاحظات هامة

١ جا^{٢} ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ، جتا^{٢} ٣٠ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا^{٢} ٤٥ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ وهكذا

خد بالك: $(\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣ وليس ٩ $(\sqrt{٢})^{٢}$ = ٣ وليس ٤ وهكذا

٢ **جا الزاوية = جتا المتممة لها** مثل: جا ٣٠ = جتا ٦٠ ، جا ٧٠ = جتا ٢٠ ، جتا ٢٥ = جا ٦٥

٣ **ظا الزاوية = $\frac{\text{جا الزاوية}}{\text{جتا الزاوية}}$** مثل: ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ ، ظا ٣٠ = $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{جتا ٣٠}}$ ، $\frac{\text{جا ٥٠}}{\text{جتا ٥٠}}$ = ظا ٥٠

٤ لحساب النسب المثلثية لأى زاوية غير ٣٠ أو ٦٠ أو ٤٥ نحسبها باستخدام الآلة

فمثلا جا ٣٦ تكتب على الآلة: sin ٣٦ ، جتا ٥٠ تكتب: cos ٥٠ وهكذا

حساب قياس الزاوية بمعلومية النسبة المثلثية لها

- إذا كان جتا هـ = ٠,٧١٥٢ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift cos ٠,٧١٥٢ = ٤٤,٢°
- إذا كان جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift sin ٠,٦٢١٨ = ٥٢″ ٢٦′ ٣٨°
- إذا كان ظا هـ = ١,٥١٥٦ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift tan ١,٥١٥٦ = ٥٩″ ٣٤′ ٥٦°
- إذا كان جتا هـ = ٠,٥ فإن ق $(\hat{هـ})$ = ٦٠° وإذا كان ظا هـ = ١ فإن ق $(\hat{هـ})$ = ٤٥°

حساب مثلثات

مثال ١

أوجد قيمة المقدار التالى مبينا خطوات الحل:

جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ − جتا^{٢} ٣٠

الحل

المقدار = $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤}$ = صفر

مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جتا ٦٠ = ٢ جتا^{٢} ٣٠ − ١

الحل

الأيمن = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

الأيسر = ٢ جتا^{٢} ٣٠ − ١

= $٢ \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - ١ = ٢ \times \frac{٣}{٤} - ١ = \frac{١}{٢}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

جتا ٦٠ جا ٣٠ − جا ٦٠ جتا ٣٠

الحل

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

مثال ٤

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جا^{٢} ٣٠ = ٥ جتا^{٢} ٦٠ − ظا^{٢} ٤٥

الحل

الأيمن = جا^{٢} ٣٠ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

الأيسر = ٥ جتا^{٢} ٦٠ − ظا^{٢} ٤٥

= $٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١^{٢}$

= $٥ \times \frac{١}{٤} - ١ = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

أوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠ + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠}{\text{جا}\ ٦٠\ \text{ظا}\ ٦٠}$

الحل

المقدار = $\frac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣}}$

= $\frac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{\frac{٣}{٢}} = ١ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٦

اثبت أن: ظا ٦٠ = $\frac{٢\ \text{ظا}\ ٣٠}{١ - \text{ظا}^{٢}\ ٣٠}$

الحل

الطرف الأيمن = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الأيسر = $\frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$ = الأيمن

مثال ٧

أوجد قيمة س التي تحقق :

ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠

حيث س زاوية حادة

الحل

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٤}$

ظا س = ١

∴ س = ٤٥

مثال ٨

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة س حيث :

٢ جا س = جا٣٠ جتا٦٠ + جتا٣٠ جا ٦٠

الحل

٢ جا س = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ جا س = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$

٢ جا س = ١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠

مثال ٩

أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان:

جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

الحل

جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{٣}{٤}$ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

مثال ١٠

أوجد قيمة س التي تحقق

٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

حيث س زاوية حادة

الحل

٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

٢ جا س = $(\sqrt{٣})^{٢}$ ـ ٢ × ١

٢ جا س = ٣ ـ ٢

٢ جا س = ١

جا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠

مثال ١١

إذا كان جا هـ ظا ٣٠ = جتا^{٢} ٤٥

فأوجد ق (هـ) حيث هـ زاوية حادة

الحل

جا هـ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$

جا هـ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣}$

جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق $(\hat{هـ})$ = ٦٠°

مثال ١٢

إذا كانت جا س = ظا ٣٠ جا ٦٠

حيث س زاوية حادة فأوجد قيمة: ٤ جتا س جا س

الحل

جا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا س = $\frac{١}{٢}$ س = ٣٠

∴ ٤ جتا س جا س = ٤ جتا ٣٠ جا ٣٠

= ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

جتا ٦٠ جا ٣٠ – جا ٦٠ ظا ٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

الحل

....

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

ظا^{٢} ٦٠ – ظا^{٢} ٤٥ = ٤ جا ٣٠

الحل

....

٣ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان:

ظا ٢س = ٤ جا ٣٠ جتا ٣٠

الحل

....

٤ أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق:

س جتا ٦٠ = جا ٣٠ + ظا ٤٥

الحل

....

أسئلة اختر على حساب المثلثات

١ جا ٤٥ جتا ٤٥ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٢ ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) $\sqrt{٣}$

٣ جا ٣٠ ظا ٦٠ = ...

(أ) جا ٣٠ (ب) جا ٦٠ (جـ) جتا٤٥ (د) ظا ٣٠

٤ إذا كان جا هـ = جتا هـ فإن ق($\hat{هـ}$) = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

٥ في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

(أ) ٢جا جـ (ب) ٢جا ب (جـ) ٢ جا أ (د) ٢جتا أ

٦ إذا كان جا٢س = ٠,٥ وكانت س زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ٧٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

٧ إذا كان جتا ٣س = $\frac{١}{٢}$ حيث ٣س زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

٨ إذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

٩ إذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ١٠٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ١١٠

١٠ في إذا كان ظا ٣س = ١ فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٤٥

١١ ظا ٤٥ جا ٣٠ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٢ ظا ٤٥ + جا ٣٠ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا

أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

١) جتا^{٢} ٣٠ + جتا^{٢} ٦٠ + ٢ جا ٣٠

٢) جتا ٦٠ جا ٣٠ – جا ٦٠ جتا ٣٠

٣) ظا^{٢} ٦٠ – ٢ جا٤٥ جتا ٤٥

٤) $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{جتا ٦٠}}$ – جتا ٣٠ جا ٦٠

٥) (جتا ٣٠ – جتا ٦٠) (جا٦٠ + جا٣٠)

٦) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ ٦٠ + جتا}^{٢}\text{ ٣٠ + ظا}^{٢}\text{ ٤٥}}{\text{جا ٦٠ ظا ٦٠ + جا ٣٠}}$

ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

١) ٤ جا ٤٥ جتا ٤٥ = ٢

٢) جتا^{٢} ٦٠ = ٥ جا^{٢} ٣٠ – ظا^{٢} ٤٥

٣) جتا^{٢} ٦٠ = جتا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٣٠ ظا ٤٥

٤) ظا^{٢}٦٠ – ظا^{٢}٤٥ = جا^{٢}٦٠ + جتا^{٢}٦٠ + ٢جا٣٠

٥) ٢ جا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠ = ظا^{٢}٦٠

٦) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

٧) جا^{٢} ٤٥ ظا^{٢} ٦٠ – ٢ جا^{٢} ٦٠ = صفر

٨) ٤ جا ٣٠ + ظا^{٢} ٤٥ = ظا^{٢} ٦٠

٩) جا^{٢} ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا^{٢} ٣٠

١٠) جتا ٦٠ = جتا^{٢} ٣٠ – جا^{٢} ٣٠

١١) جا^{٣} ٣٠ = ٩ جتا^{٣} ٦٠ – ظا ٤٥

١٢) ظا ٦٠ = ٢ ظا٣٠ ÷ (١ – ظا^{٢} ٣٠)

جـ) أوجد قيمة س التي تحقق الآتى حيث أن س زاوية حادة :

١) ظا س = ٤ جا ٣٠ جتا ٦٠

٢) جا س = ٢ جا٣٠ جتا٦٠

٣) جا س = ٣ جا٣٠ جتا٦٠

٤) جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

٥) س جا ٣٠ جتا^{٢} ٤٥ = جتا^{٢} ٣٠

٦) س – جا ٣٠ جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠

٧) ٤ س = جتا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٤٥

٨) ظا س = جتا^{٢} ٣٠ – جا^{٢} ٣٠

٩) س جتا ٦٠ جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠

١٠) ٣ ظا س = ٢ جا٣٠ + ٤ جتا٦٠

١١) س جا^{٢} ٤٥ = ظا^{٢} ٦٠

١٢) جا س جا^{٢} ٦٠ = ٣جا^{٢} ٤٥ جتا^{٢} ٤٥ جتا ٦٠

د) إذا كان ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س زاوية حادة

فأوجد قيمة: جا س ظا ($\frac{\text{٣ س}}{٢}$) + جتا (٢س)

هـ) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

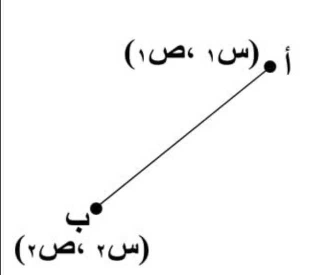
فأوجد قيمة: جتا جـ جا أ – جا جـ جتا أ

البعد بين نقطتين

إذا كانت النقطة أ (س١ ،ص١) ، النقطة ب (س٢ ، ص٢) فإنه يمكن حساب البعد بين النقطتين بالقانون:

البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أي أن البعد = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$



مثال ١

أوجد البعد بين النقطتين (٣،٢) ، (٥،١)

الحل

البعد = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(٥ - ٣)^٢ + (١ - ٢)^٢}$ = $\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ١}$ = $\sqrt{٥}$

مثال ٢

إذا كانت أ (٦،-٢) ، ب (١،-١) فأوجد طول أ ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(١ - ٦)^٢ + (-١ - -٢)^٢}$ = $\sqrt{(-٥)^٢ + ١^٢}$

= $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

ملاحظات هامة

١) لحساب طول ضلع نحسب البعد بين نقطة بدايته ونقطة نهايته.

٢) البعد بين النقطة (س ، ص) ونقطة الأصل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٣) بعد النقطة (س،ص) عن محور الصادات = |س| بينما بعد النقطة عن محور السينات = |ص|

مثال : بعد النقطة (-٥ ، -٢) عن محور الصادات = ٥ ، بعد النقطة (-٣، ٤) عن محور السينات = ٤

٤) نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه ٣ أنواع : متساوى الساقين ـ متساوى الأضلاع ـ مختلف الأضلاع

٥) نوع المثلث بالنسبة لزواياه ٣ أنواع : حاد ـ قائم ـ منفرج

قوانين المساحات

- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع
- مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه
- مساحة الدائرة = π نق^٢
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- محيط الدائرة = ٢ π نق

إثباتات هامة باستخدام البعد

إثبات أن: أ ،ب، جـ رؤوس مثلث

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ

نثبت ن : مجموع طولى أي ضلعين > طول الثالث

مثل : أ ب + ب جـ > أ جـ

إثبات أن: Δ أ ب جـ قائم في ب

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر = $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: Δ أ ب جـ منفرج

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر > $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: Δ أ ب جـ حاد

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر < $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن : كل ضلعان متقابلان متساويان

أي أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د معين

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول

أ ب = ب جـ = جـ د = أ د

إثبات أن: الشكل مستطيل

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أنه متوازى أضلاع (كل ضلعان متقابلان متساويان)
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أن: الشكل مربع

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب: طول أب ، ب جـ ، أ جـ

نثبت أن: الطول الأكبر = مجموع الطولين الآخرين

إثبات أن: النقط أ،ب،جـ تمر بدائرة مركزها م

نحسب: طول أ م ، ب م ، جـ م بالبعد

ثم نثبت أن: أ م = ب م = جـ م = نق

مثال ١

اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٥،-٥) ، ب (-١،٧) ، جـ (١٥،١٥)

قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته

الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(-١-٥)^{٢} + (٧ - -٥)^{٢}} = \sqrt{(-٦)^{٢} + ١٢^{٢}}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٨٠}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(١٥ - -١)^{٢} + (١٥ - ٧)^{٢}} = \sqrt{١٦^{٢} + ٨^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥٦ + ٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١٥ - ٥)^{٢} + (١٥ - -٥)^{٢}} = \sqrt{١٠^{٢} + ٢٠^{٢}}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$

$(\text{أ جـ})^{٢} = ٥٠٠$

$(\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢} = ١٨٠ + ٣٢٠ = ٥٠٠$

$\because (\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ $\therefore$ المثلث قائم فى ب

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع

$= \frac{\sqrt{١٨٠} \times \sqrt{٣٢٠}}{٢} = ١٢٠$

مثال ٢

بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٣،٣) ، ب (١،٥) ، جـ (١،٣)

بالنسبة لأضلاعه

الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(١-٣)^{٢} + (٥-٣)^{٢}} = \sqrt{(-٢)^{٢} + ٢^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(١-١)^{٢} + (٣-٥)^{٢}} = \sqrt{٠^{٢} + (-٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٠ + ٤} = \sqrt{٤} = ٢$

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١-٣)^{٢} + (٣-٣)^{٢}} = \sqrt{(-٢)^{٢} + ٠^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٠} = \sqrt{٤} = ٢$

$\because$ ب جـ = أ جـ

$\therefore$ $\triangle$ متساوى الساقين

مثال ٣

اثبت باستخدام البعد أن النقط

أ (-٣،-١) ، ب (٦،٥) ، جـ (٣،٣)

تقع على استقامة واحدة

الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(٦ - -٣)^{٢} + (٥ - -١)^{٢}} = \sqrt{٩^{٢} + ٦^{٢}}$

$= \sqrt{٨١ + ٣٦} = \sqrt{١١٧}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(٣ - ٦)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

$\text{أ جـ} = \sqrt{(٣ - -٣)^{٢} + (٣ - -١)^{٢}} = \sqrt{٦^{٢} + ٤^{٢}}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٢}$

أ ب = ١٠,٨١٧ ، ب جـ + أ جـ = ١٠,٨١٧

$\because$ أ ب = ب جـ + أ جـ

$\therefore$ النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (٣،-١) ، ب (-٤،٦) ، جـ (٢ ، -٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها م (-١،٢) ثم أوجد محيط الدائرة

الحل

$\text{أ م} = \sqrt{(-١ - ٣)^{٢} + (٢ - -١)^{٢}} = \sqrt{(-٤)^{٢} + ٣^{٢}}$

$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$\text{ب م} = \sqrt{(-١ - -٤)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}} = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$\text{جـ م} = \sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ - -٢)^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢} + ٤^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$\because$ أ م = ب م = جـ م

$\therefore$ النقط تمر بها دائرة واحدة

محيط الدائرة $= ٢\pi$ نق $= ٢ \times ٣,١٤ \times ٥ = ٣١,٤$

مثال ٥

أ ب جـ د شكل رباعى حيث

أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، -٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ، ٤)

اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين وأوجد مساحته

الحل

أ ب = $\sqrt{(٦ - ٥)^{٢} + (-٢ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٢٦}$

ب جـ = $\sqrt{(١ - ٦)^{٢} + (-١ - -٢)^{٢}} = \sqrt{٢٦}$

جـ د = $\sqrt{(٠ - ١)^{٢} + (٤ - -١)^{٢}} = \sqrt{٢٦}$

أ د = $\sqrt{(٠ - ٥)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٢٦}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ∴ الشكل معين

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

أ جـ = $\sqrt{(١ - ٥)^{٢} + (-١ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٣٢}$

ب د = $\sqrt{(٠ - ٦)^{٢} + (٤ - -٢)^{٢}} = \sqrt{٧٢}$

مساحة المعين = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢} = ٢٤$

مثال ٦

أ ب جـ د شكل رباعى حيث

أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، جـ (-٧ ، ٥) ، د (-٢ ، ٩)

اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحته

الحل

أ ب = $\sqrt{(-٣ - ٢)^{٢} + (٠ - ٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

ب جـ = $\sqrt{(-٧ - -٣)^{٢} + (٥ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

جـ د = $\sqrt{(-٢ - -٧)^{٢} + (٩ - ٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

أ د = $\sqrt{(-٢ - ٢)^{٢} + (٩ - ٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

نحسب القطران أ جـ ، ب د

أ جـ = $\sqrt{(-٧ - ٢)^{٢} + (٥ - ٤)^{٢}} = \sqrt{٨٢}$

ب د = $\sqrt{(-٢ - -٣)^{٢} + (٩ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٨٢}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ = ب د

∴ الشكل مربع

مساحة المربع = $\sqrt{٤١} \times \sqrt{٤١} = ٤١$ وحدة طول مربعة

مثال ٧

إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى $٢\sqrt{٥}$ فأوجد قيمة س

الحل

البعد = $\sqrt{\text{فرق السينات}^{٢} + \text{فرق الصادات}^{٢}}$

∴ $(٢\sqrt{٥})^{٢} = (س - ٦)^{٢} + (٥ - ١)^{٢}$

$٤ \times ٥ = (س - ٦)^{٢} + ١٦$

$٢٠ = (س - ٦)^{٢} + ١٦$ ننقل الـ ١٦

$٢٠ - ١٦ = (س - ٦)^{٢}$

$٤ = (س - ٦)^{٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

س − ٦ = ٢ ∴ س = ٨

أو س − ٦ = −٢ ∴ س = ٤

مثال ٨

إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب جـ فأوجد قيمة س

الحل

ب جـ = $\sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (١ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

∵ أ ب = ب جـ

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٥}$ بتربيع الطرفين

$(س - ٣)^{٢} + ١ = ٥$

$(س - ٣)^{٢} = ٤$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ س − ٣ = ٢ ∴ س = ٥

أو س − ٣ = −٢ ∴ س = ١

تدريبات

إعداد أ/ محمود عوض حسن

١

أ ب جـ مثلث فيه

أ (٢،٨) ، ب (-١،٤) ، جـ (٣،١)

بين نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه

الحل

....

٢

إذا كانت النقط أ (٣،٢) ، ب (٤،-٣)

، جـ (-١،-٢) ، د (-٢،٣) هي رؤوس معين

فأوجد مساحة المعين أ ب جـ د

الحل

....

٣

اثبت أن النقط أ (-١،-٤) ، ب (١،٠)

، جـ (٢،٢) تقع على استقامة واحدة

الحل

....

٤

إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٠ ، ٣)

يساوى ٥ وحدات طول فأوجد قيمة أ

الحل

....

أسئلة اختر على درس البعد

١) البعد بين النقطتين (٢،٠) ، (٥،٠) هو .... وحدة طول

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{29}$ (د) ٣

٢) بعد النقطة (٢،-٤) عن محور السينات = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) -٤ (د) ٦

٣) المسافة بين النقطة (٣،٤) والمحور الصادى هى .... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

٤) بعد النقطة (٣ ، ٤) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٥

٥) البعد العمودى بين المستقيمين س – ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

٦) البعد العمودى بين المستقيمين ص + ١ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

٧) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠،٠) ، (٥،١٢) = ... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

٨) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) ١٢ (د) ٥

٩) البعد بين النقطة (٥ ، ظا^{2} ٦٠) ومحور السينات = ...

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{3}$

١٠) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (-١،٤) ، (٥،١٢) = ... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

١١) إذا كان البعد بين النقطتين (أ،٠) ، (٠،١) هو وحدة طول فإن أ = ...

(أ) -١ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ±١

١٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأى من النقاط الأتية تنتمى للدائرة ....

(أ) (١،٢) (ب) (-٢،١) (جـ) ($\sqrt{3}$ ، ١) (د) ($\sqrt{2}$ ، ١)

١٣) النقط (٠،٠) ، (٣،٠) ، (٠،٤) تكون ....

(أ) Δ حاد (ب) Δ منفرج (جـ) Δ قائم (د) على استقامة واحدة

تمارين على البعد بين نقطتين

١ إذا كانت أ (٢،٨) ، ب (-١،٤) ، جـ (٣،١)
اثبت ان المثلث أ ب جـ متساوى الساقين

---

٢ اثبت أن النقط أ (٥،٣) ، ب (٣،-٢) ،
جـ (-٢ ، -٤) هي رؤوس مثلث

---

٣ بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (٣،٠) ، ب (١،٤) ، جـ (-١،٢)
من حيث أطوال أضلاعه

---

٤ اثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط
أ (-١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٧،٤) ، د (١،٦)
متوازى أضلاع

---

٥ أوجد مساحة المستطيل أ ب جـ د حيث:
أ (-١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٦،٤) ، د (٠،٦)

---

٦ اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (٢ ، -٣)
قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته

---

٧ إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١)
يساوى $\sqrt{٢}$ وحدة طول فأوجد قيمة أ

---

٨ اثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١)
، جـ (-٥ ، -٣) تقع على استقامة واحدة

---

٩ اثبت أن النقط أ (-٢،٠) ، ب (٥،١)
، جـ (٦،-٦) الواقعة في مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة مركزها (٢ ، -٣)
ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة بدلالة π

---

١٠ س ص ع ل معين رؤوسه س (٣،٢) ،
ص (٤، -٣) ، ع (-١، -٢) ، ل (-٢ ، ٣)
أوجد مساحة سطحه

---

١١ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢،٤)
، ب (-٣،٤) ، جـ (-٣ ، -١) ، د (٢ ، -١)
اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحة سطحه

---

١٢ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (-١، ٣)
، ب (٥،١) ، جـ (٦،٤) ، د (٠،٦)
اثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

---

١٣ أ ب جـ مثلث حيث أ (٥ ، ٣)
، ب (٣ ، - ٢) ، جـ (-٢ ، -٤)
بين نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه

---

١٤ إذا كانت أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، جـ (-٥ ، -٣)
بين هل النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة أم لا؟

---

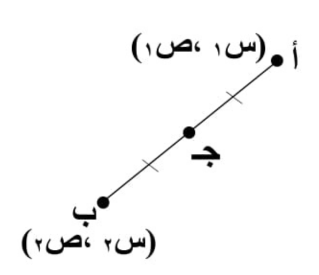
١٥ دائرة مركزها النقطة م (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة
(٣ ، ١) احسب مساحة الدائرة

إحداثى منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت النقطة أ (س١ ،ص١) ، النقطة ب (س٢ ، ص٢) فإنه يمكن حساب إحداثى نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ بالقانون:

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$



ملاحظات هامة

١) **الفكرة المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى البداية والنهاية وتحسب إحداثى المنتصف (زى مثال ١)

٢) **الفكرة غير المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والبداية وتحسب إحداثى النهاية (زى مثال ٢)
أو يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والنهاية وتحسب إحداثى البداية

٣) مجموع السينات يقصد به سينات البداية والنهاية هي التي تجمع (إياك تجمع سينات المنتصف مع أي حاجة)

٤) متوازى الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين فيهم : القطران ينصف كل منهما الآخر

٥) مركز الدائرة هو منتصف القطر

مثال ١

إذا كان أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (٤،-١) ، ب (-٢،٧) فأوجد إحداثى المركز م

الحل

أ (٤،-١) ، م ، ب (-٢،٧)

م هي منتصف القطر أ ب

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٤ + -٢}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٦}{٢} \right) = (١ ، ٣)$$

مثال ٢

إذا كانت جـ (٦ ، -٤) هى منتصف أ ب حيث أ (٥ ، - ٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

الحل

نفرض أن ب (س ، ص)

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$\therefore (٦ ، -٤) = \left(\frac{٥ + س}{٢} ، \frac{-٣ + ص}{٢} \right)$$

$$\frac{٥ + س}{٢} = ٦ \qquad \frac{-٣ + ص}{٢} = -٤$$

$$٥ + س = ١٢ \qquad -٣ + ص = -٨$$

$$س = ٧ \qquad ص = -٥$$

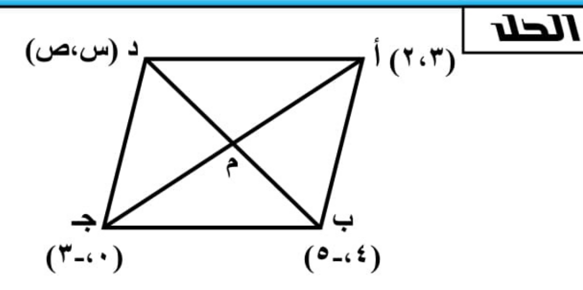
$\therefore$ إحداثى ب = (٧ ، -٥)

مثال ٣

أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه

أ (٣،٢) ، ب (٤، -٥) ، جـ (٠، -٣) أوجد إحداثى نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثى نقطة د

الحل



نقطة تقاطع القطرين هى م منتصف أ جـ

م منتصف أ جـ = $\left(\frac{٠ + ٣}{٢} ، \frac{-٣ + ٢}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

نفرض أن النقطة د هى (س ، ص)

∵ منتصف أ جـ = منتصف ب د

∴ $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right) = \left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{-٥ + ص}{٢}\right)$

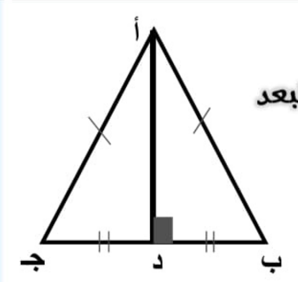
المسقط الأول = المسقط الأول	المسقط الثانى = المسقط الثانى
$\frac{٤ + س}{٢} = \frac{٣}{٢}$	$\frac{-٥ + ص}{٢} = \frac{-١}{٢}$
٤ + س = ٣	-٥ + ص = -١
س = -١	ص = ٤

∴ إحداثى د = (-١ ، ٤)

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (-٣،٠) ، ب (٣،٤) ، جـ (١،-٦) هي رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على ب جـ

الحل



إثبات أن Δ متساوى الساقين بالبعد

حساب إحداثى د بالمنتصف

حساب طول أ د بالبعد

أ ب = $\sqrt{(٣ - -٣)^٢ + (٤ - ٠)^٢} = \sqrt{٦^٢ + ٤^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٢}$

أ جـ = $\sqrt{(١ - -٣)^٢ + (-٦ - ٠)^٢} = \sqrt{٤^٢ + (-٦)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٣٦} = \sqrt{٥٢}$

∵ أ ب = أ جـ ∴ Δ متساوى الساقين

∵ أ د ⊥ ب جـ ∴ د منتصف ب جـ

د (منتصف ب جـ) = $\left(\frac{٣+١}{٢} ، \frac{٤+-٦}{٢}\right) = (٢ ، -١)$

∵ أ (-٣،٠) ، د (٢،-١)

∴ أ د = $\sqrt{(٢--٣)^٢ + (-١ - ٠)^٢} = \sqrt{٥^٢ + (-١)^٢}$

$= \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول

٥

إذا كانت أ(-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) ، د (٣ ، -٤) اثبت أن أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

الحل

منتصف أ جـ = $\left(\frac{-١ + ٦}{٢} ، \frac{-١ + ٠}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

منتصف ب د = $\left(\frac{٢ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + -٤}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

∵ منتصف أ جـ = منتصف ب د

∴ أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

٦

أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م حيث ب (٨ ، ١١) ، م ((٥ ، ٧) فأوجد :

١) إحداثى النقطة أ ٢) طول نصف قطر الدائرة

الحل

مركز الدائرة م هو منتصف القطر أ ب

نفرض أن احداثى أ = (س ، ص)

المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

$(٥ ، ٧) = \left(\frac{س + ٨}{٢} ، \frac{ص + ١١}{٢}\right)$

$\frac{س + ٨}{٢} = ٥$	$\frac{ص + ١١}{٢} = ٧$
س + ٨ = ١٠	ص + ١١ = ١٤
∴ س = ٢	∴ ص = ٣

إحداثى أ = (٢ ، ٣)

طول نصف القطر م ب = $\sqrt{(٨- ٥)^٢ + (١١ - ٧)^٢} = ٥$

مثال ٧

إذا كانت أ (١،-٦) ، ب (٩،٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ إلى أربعة أجزاء متساوية الطول

الحل

أ (١،-٦) — د — جـ — هـ — ب (٩،٢)

إحداثى المنتصف = ($\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}$ ، $\frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}$)

إحداثى جـ (منتصف أب) = ($\frac{٩+١}{٢}$ ، $\frac{٢+-٦}{٢}$) = (٥ ، -٢)

إحداثى د (منتصف أجـ) = ($\frac{٥+١}{٢}$ ، $\frac{-٢+-٦}{٢}$) = (٣ ، -٤)

إحداثى هـ (منتصف جـ ب) = ($\frac{٩+٥}{٢}$ ، $\frac{٢+-٢}{٢}$) = (٧ ، ٠)

مثال ٨

إذا كانت النقطة (٣،١) في منتصف البعد بين النقطتين (١، ص) ، (س ، ٣)

فأوجد النقطة (س،ص)

الحل

أ (١،ص) — جـ (٣،١) — ب (س،٣)

إحداثى المنتصف = ($\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}$ ، $\frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}$)

∴ (٣،١) = ($\frac{١+\text{س}}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}+٣}{٢}$)

$\frac{١+\text{س}}{٢} = ٣$ ، ١ + س = ٦ ، س = ٥

$\frac{\text{ص}+٣}{٢} = ١$ ، ص + ٣ = ٢ ، ص = -١

∴ (س ، ص) = (٥ ، -١)

مثال ٩

اثبت أن النقط أ (٦،٠) ، ب (٢،-٤) ، جـ (-٤،٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثى نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلا

الحل

أب = $\sqrt{(٢-٦)^٢ + (-٤-٠)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٤)^٢}$
$= \sqrt{١٦+١٦} = \sqrt{٣٢}$

ب جـ = $\sqrt{(-٤-٢)^٢ + (٢--٤)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + ٦^٢}$
$= \sqrt{٣٦+٣٦} = \sqrt{٧٢}$

أ جـ = $\sqrt{(-٤-٦)^٢ + (٢-٠)^٢} = \sqrt{(-١٠)^٢ + ٢^٢}$
$= \sqrt{١٠٠+٤} = \sqrt{١٠٤}$

(أجـ)^٢ = ١٠٤

(أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٣٢+٧٢ = ١٠٤

∵ (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ∴ المثلث قائم

د (س ، ص) — أ (٦،٠) — ب (٢ ، -٤) — جـ (-٤،٢)

منتصف أ جـ = ($\frac{٦+-٤}{٢}$ ، $\frac{٢+٠}{٢}$) = (١ ، ١)

نفرض أن د = (س ، ص)

منتصف ب د = ($\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}$ ، $\frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}$)

(١ ، ١) = ($\frac{٢+\text{س}}{٢}$ ، $\frac{-٤+\text{ص}}{٢}$)

المسقط الأول = المسقط الأول	المسقط الثانى = المسقط الثانى
$\frac{٢+\text{س}}{٢} = ١$	$\frac{-٤+\text{ص}}{٢} = ١$
٢ + س = ٢	-٤ + ص = ٢
س = ٠	ص = ٦

∴ إحداثى د = (٠ ، ٦)

١ أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه في م

حيث أ (٣،-١) ، جـ (١،٧)

أوجد إحداثى نقطة م

الحل

....

٢ إذا كانت النقطة أ (٢،٣) هي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

حيث جـ (-١،٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

الحل

....

٣ إذا كانت جـ (س ، ـ٣) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث

أ (ـ٣،ص) ، ب (٩،١١) فأوجد قيمة س + ص

الحل

....

٤ إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م حيث أ (٤ ، ـ١) ،

ب (ـ٢ ، ٧) فأوجد إحداثى مركز الدائرة م

وطول نصف قطر الدائرة

الحل

....

أسئلة اختر على درس المنتصف

١) إذا كانت أ (-١،٩) ، ب (-١،-١) فإن إحداثى منتصف أ ب هو ....

(أ) (٤،٠) (ب) (٠،٤) (جـ) (١،٩) (د) (-١،٤)

٢) إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، -٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو ....

(أ) (-٤،-٢) (ب) (٤،-٢) (جـ) (٢،٢) (د) (٨،-٢)

٣) إذا كان أ ب جـ د مربع ، أ (٣،٤) ، جـ (٥،٦) فإن إحداثى نقطة تقاطع قطريه = ...

(أ) (٨،١٠) (ب) (١٠،٨) (جـ) (٤،٥) (د) (١٥،٢٤)

٤) إذا كانت (٣،٢) منتصف أ ب حيث أ (٣،-٢) فإن إحداثى ب هو ....

(أ) (٣،٦) (ب) (٠،٠) (جـ) (٠،٦) (د) (١،٥)

٥) إذا كانت جـ (-٣،ص) منتصف أ ب حيث أ (س،-٦) ، ب (١،-٨) فإن س + ص = ...

(أ) -١١ (ب) ١١ (جـ) -١٨ (د) -١٤

٦) إذا كانت (٢،١) تنصف البعد بين النقطتين (٣،-٤) ، (س،٦) فإن س = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) -١ (د) ١

تعميم محمود عوض
معلم رياضيات

تمارين على إحداثى المنتصف

١) أوجد إحداثى نقطة منتصف أ ب حيث

أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، صفر)

٢) إذا كانت النقطة جـ (٣ ، ١) هي منتصف البعد

بين النقطتين أ (١ ، ص) ، ب (س ، ٣)

فأوجد النقطة (س ، ص)

٣) أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه في هـ

حيث أ (٣،-١) ، ب (٦،٢) ، جـ (١،٧)

أوجد إحداثى كل من النقطتين هـ ، د

٤) أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت

ب (٨،١١) ، م (٥،٧) فأوجد

١) إحداثى نقطة أ ٢) محيط الدائرة بدلالة π

٥) أ ب جـ د مستطيل فيه:

أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) فأوجد:

١) إحداثى نقطة د

٢) مساحة المستطيل أ ب جـ د

٦) اثبت أن النقط أ (٥،٣) ، ب (٣،-٢) ، جـ (-٢،-٤)

هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب

ثم أوجد إحداثى نقطة د التي تجعل أ ب جـ د معين

وأوجد مساحة سطحه

٧) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣،٤) ،

ب (٢،-١) ، جـ (-٤ ، -٣) أوجد إحداثى د

خذ هـ ∈ أ د حيث أ هـ = ٢ أ د

ميل الخط المستقيم

يرمز للميل بالرمز م ويمكن حسابه بالقوانين التالية :

(حسب المعطى في المسألة هتختار القانون المناسب)

١ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) فإن:

$$م = \frac{فرق\ الصادات}{فرق\ السينات} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

٢ إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ

$$م = ظا\ هـ$$

٣ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ (س ، ص مع بعض)

$$م = \frac{-\ معامل\ س}{معامل\ ص}$$

٤ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة ص = أ س + جـ (ص لوحدها)

$$م = \frac{معامل\ س}{معامل\ ص}$$

ملاحظات هامة

١) **تعريف الميل:** هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٢) إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور الصادات فإن : **السينات تكون متساوية**

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (س ، ٤) ويوازى محور الصادات فإن س = ٣

٣) إذا كان المسستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور السينات فإن : **الصادات تكون متساوية**

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، -٤) ، (٦ ، ك) ويوازى محور السينات فإن ك = -٤

٤) المستقيم الموازى لمحور السينات ميله = **صفر** ، بينما الموازى لمحور الصادات ميله **غير معرف**

٥) إذا كان المستقيم يصنع زاوية **حادة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل **موجب**

إذا كان المستقيم يصنع زاوية **منفرجة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل **سالب**

٦) يمكن قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات بمعلومية الميل: shift ← tan ← الميل

تدريبات على حساب الميل

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢،-١) ، (٦،٣)

الحل

الميل م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣ - -١}{٦ - ٢}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

الحل

الميل م = ظا هـ = ظا ٣٠ =

٣ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٤س – ٧ص – ١ = ٠

الحل

الميل م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٤}{-٧}$ = $\frac{٤}{٧}$

٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٢ص = ٦س + ١

الحل

الميل م = $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

٥ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، ١) ، (٣ ، ٥)

الحل

٦ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

٧ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٥ص + ٢س = ٣

الحل

٨ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٣ص = س – ٢

الحل

٩ إذا كانت ب (-٥ ، ٣) ، جـ (-١ ، ٧) فأوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٧ - ٣}{-١ - -٥}$ = ١

∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١ ∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٤٥°

متفوقين أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$\frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{س}}{٣} = ٥$ (بطريقتين)

الحل

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان المستقيمان متوازيان فإن:

ميل الأول = ميل الثانى

$م_1 = م_2$

لإثبات أن المستقيمان متوازيان :

نحسب: $م_1$ ، $م_2$ ونثبت أن: $م_1 = م_2$

لو عندك مستقيمين متوازيين وعايز قيمة مجهول:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : الميل المجهول = الميل المعلوم

إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٣}{٤}$ فإن ميل الموازى له = $\frac{٣}{٤}$

إذا كان ميل مستقيم = ـ٢ فإن ميل الموازى له = ...

مثال ١ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،ـ١) ، (٦،٣) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

$م_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ـ١}{٦ - ٢} = \frac{٤}{٤} = ١$

$م_2 = $ ظا ٤٥ = ١

∵ $م_1 = م_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن:

$م_1 \times م_2 = ـ١$ أو $م_1 = \frac{ـ١}{م_2}$

لإثبات أن المستقيمان متعامدان :

نثبت أن: $م_1 \times م_2 = ـ١$

أو ميل = صفر والميل الآخر غير معرف

لو عندك مستقيمين متعامدين وعايز قيمة مجهول:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : الميل المجهول = ـ شقلوب المعلوم

إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٣}{٤}$ فإن ميل العمودى عليه = $\frac{ـ٤}{٣}$

إذا كان ميل مستقيم = ـ١ فإن ميل العمودى عليه = ...

مثال ٢ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (ـ٣،٤) ، (ـ٣،ـ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (١،٢) ، (ـ٣،٢)

الحل

$م_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ـ٢ - ٤}{ـ٣ - ـ٣} = \frac{ـ٦}{٠}$ غير معرف

$م_2 = \frac{٢ - ٢}{ـ٣ - ١} = \frac{٠}{ـ٤} = $ صفر

∴ المستقيمان متعامدان

إعداد أ/ محمود عوض حسن

مثال ١
اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ، (٠،٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١،٤) ، (١،٧)

الحل

م١ = فرق الصادات / فرق السينات = (٣ ـ ٠) / (٢ ـ ٠) = ٣/٢

م٢ = فرق الصادات / فرق السينات = (٧ ـ ٤) / (١ ـ -١) = ٣/٢

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٢
أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١)

الحل

م٢ = فرق الصادات / فرق السينات = (١ ـ -٢) / (٥ ـ ٢) = ٣/٣ = ١

∵ المستقيمان متعامدان

∴ م١ = -١ / م٢ = -١

مثال ٣
اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) يوازى المستقيم ٣ص ـ س ـ ١ = ٠

الحل

م١ = فرق الصادات / فرق السينات = (٤ - ٣) / (٢ - -١) = ١/٣

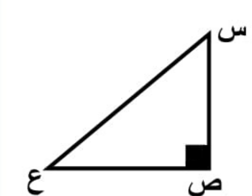
م٢ = ـ معامل س / معامل ص = ١/٣

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٤
إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤،٢) ، س (٣،٥) ، ع (-٥،أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ

الحل

∵ Δ قائم فى ص ∴ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{ص ع}}$



ميل س ص = (٢ ـ ٥) / (٤ ـ ٣) = -٣

ميل ص ع = (أ - ٢) / (-٥-٤) = (أ - ٢) / -٩

∵ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{ص ع}}$ ∴ م١ × م٢ = -١

(أ - ٢) / -٩ = ١/٣ أ - ٢ = -٣ ∴ أ = -١

مثال ٥
إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢، ك) والمستقيم ل٢ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان ل١ // ل٢

الحل

م١ = فرق الصادات / فرق السينات = (ك - ١) / (٢ - ٣) = (ك - ١) / -١

م٢ = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م١ = م٢

(ك - ١) / -١ = ١ (مقص) ك ـ ١ = -١

ك = -١ + ١ ∴ ك = صفر

مثال ٦
إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢، ك) والمستقيم ل٢ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان ل١ ⊥ ل٢

الحل

م١ = (ك - ١) / (٢ - ٣) = (ك - ١) / -١ م٢ = ظا ٤٥ = ١

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م١ = -١ / م٢

المجهول = ـ شقلوب المعلوم

(ك - ١) / -١ = -١ ك ـ ١ = ١

ك = ١ + ١ ∴ ك = ٢

تدريبات

١

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

(-٤، ١) ، (٣ ، ٥) يوازى المستقيم الذى معادلته

٤س – ٧ص – ٩ = ٠

الحل

....

٢

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

(٤ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ، (٥،٢ $\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم

الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠°

الحل

....

٣

إذا كان المستقيمان $ل_١$: ٣س – ٤ص – ٣ = ٠

، $ل_٢$: أ ص + ٤س – ٨ = ٠ متعامدين

فأوجد قيمة أ

الحل

....

٤

إذا كان المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢س + ٦

يوازى المستقيم الذى معادلته ٦س + ك ص – ٣ = ٠

فأوجد قيمة ك

الحل

....

إثباتات هامة باستخدام الميل

إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب أي ميلين ونثبت أنهما متساويان

مثل: ميل أ ب = ميل ب جـ

إثبات أن: Δ أ ب جـ قائم في ب

نحسب: ميل أ ب ، ب جـ (المتعامدان)

نثبت أن : ميل أ ب × ميل ب جـ = -١



إثبات أن: الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

نثبت أن : ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان

أي أن : ميل ب جـ = ميل أ د ، ميل أ ب ≠ ميل جـ د

تصميم محمود عوض معلم رياضيات

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متوازيان

أي أن : ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د معين

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- القطران متعامدان : ميل أ جـ × ميل ب د = -١

إثبات أن: الشكل مستطيل

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- ضلعان متجاوران متعامدان كالتالى:

ميل أ ب × ميل ب جـ = -١

إثبات أن: الشكل مربع

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- ضلعان متجاوران متعامدان

٣- القطران متعامدان

مثال ١

اثبت أن النقط أ (-٣،-١) ، ب (٦،٥) ، جـ (٣،٣) تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - -١}{٦ - -٣} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٥}{٣ - ٦} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∵ ميل أ ب = ميل ب جـ

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

مثال ٢

إذا كانت النقط (٠،١) ، (أ ، ٣) ، (٢،٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ

الحل

نحسب الميل من النقطة (٠ ، ١) والنقطة (أ ، ٣)

$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ١}{أ - ٠} = \frac{٢}{أ}$

نحسب الميل من النقطة (٠ ، ١) والنقطة (٢ ، ٥)

$م_٢ = \frac{٥ - ١}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$

∵ النقط تقع على استقامة واحدة ∴ $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{٢}{أ} = ٢$ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) ، د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٣}{٥ - -١} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{٤ - ١}{٦ - ٥} = ٣$

ميل جـ د = $\frac{٦ - ٤}{٠ - ٦} = \frac{٢}{-٦} = \frac{-١}{٣}$

ميل أ د = $\frac{٦ - ٣}{٠ - -١} = ٣$

∵ ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∴ الشكل متوازى أضلاع

لإثبات أنه مستطيل نثبت أن ضلعان متجاوران متعامدان

∵ ميل أ ب × ميل ب جـ = $\frac{-١}{٣}$ × ٣ = -١

∴ أ ب ⊥ ب جـ ∴ الشكل مستطيل

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، -٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ، ٤) هي رؤوس معين

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-٢ - ٣}{٦ - ٥} = -٥$

ميل ب جـ = $\frac{-٢ - -١}{٦ - ١} = \frac{-١}{٥}$

ميل جـ د = $\frac{٤ - -١}{٠ - ١} = \frac{٥}{-١} = -٥$

ميل أ د = $\frac{٣ - ٤}{٥ - ٠} = \frac{-١}{٥}$

∵ ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∴ الشكل متوازى أضلاع

لإثبات أنه معين نثبت أن القطران متعامدان

ميل أ جـ = $\frac{٣ - -١}{٥ - ١} = \frac{٤}{٤} = ١$

ميل ب د = $\frac{-٢ - ٤}{٦ - ٠} = \frac{-٦}{٦} = -١$

∵ ميل أ جـ × ميل ب د = ١ × -١ = -١

∴ القطران متعامدان ∴ الشكل معين

تدريبات

إعداد أ/ محمود عوض حسن

١ اثبت أن النقط أ (٥،١) ، ب (٣، ـ٧) ، جـ (١،٣) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الحل

....

٢ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (ـ١،١) ، ب (٠،٥) ، جـ (٥،٦) ، د (٤،٢) فاثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

الحل

....

٣ اثبت أن النقاط أ (٢،٣) ، ب (٦،٢) ، جـ (٠،ـ١) ، د (ـ٢،١) تكون رؤوس شبه المنحرف

الحل

....

٤ اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٦،٠) ، ب (٢،ـ٤) ، جـ (ـ٤،٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

الحل

....

أسئلة اختر على درس الميل

(١) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير معرف

(٢) ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٤ ص + ١٢ = ٠ هو ....

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣) المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢س + ٦ ميله = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وكان ميل أ ب = ٠,٧٥ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٥٧

(٥) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، وكان ميل أ ب = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ،فيه أ (-٣،٤) ، ب (-١،-٢) فإن ميل ب جـ = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١،ص) ، (٣،٤) ميله يساوى ظا ٤٥ فإن ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) -١ (د) ٢

(٨) إذا كان ميل المستقيم أ س – ص + ٥ = ٠ يساوى ٣ فإن قيمة أ = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيان فإن ك = ...

(أ) ٦ (ب) -٤ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٠) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن ك = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(١١) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (ك ، ٤) ، د (-٥ ، ٧) فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) -٥ (د) ٤

(١٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٨ ، ٣) ، د (٢ ، ك) يوازى محور السينات فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٣) إذا كان المستقيم ل س – ٥ ص + ٧ = صفر يوازى محور السينات فإن ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٧

تمارين على ميل الخط المستقيم

١) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٠،٥) ، (٣،٢) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

---

٢) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (ـ٣،ـ٢) ، (٤،٥) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

---

٣) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١،٣) ، (٢،٤) يوازى المستقيم الذى معادلته ص – س = ٥

---

٤) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع الاتجاه السالب لمحور السينات حيث

أ (٣ ، ـ٢) ، ب (٦ ، ١)

---

٥) إذا كان المستقيم الذى معادلته أ س + ٢ص – ٧ = ٠ يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة أ

---

٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ـ٢ ، ٣) ، (١ ، ك) عموديا على مستقيم ميله ـ ٣ فأوجد قيمة ك

---

٧) إذا كانت معادلتى المستقيمين ل١ ، ل٢ هما على الترتيب:

٢س – ٣ص + ١ = ٠ ، ٣س + ب ص – ٦ = ٠

فأوجد قيمة ب التي تجعل:

١) ل١ // ل٢ ٢) ل١ ⊥ ل٢

٨) اثبت أن النقط أ (٤،٣) ، ب (١،١) ، جـ (ـ٥،ـ٣) تقع على استقامة واحدة

---

٩) اثبت أ ن النقط أ (ـ٢،٥) ، ب (٢،٣) ، جـ (ـ٤،٢) ليست على استقامة واحدة

---

١٠) اثبت أن الشكل الرباعى أ ب جـ د الذى رؤوسه أ (ـ١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٧،٤) ، د (١،٦) متوازى أضلاع

---

١١) أ ب جـ د شكل رباعى حيث :

أ (٣،٢) ، ب (٤،ـ٣) ، جـ (ـ١،ـ٢) ، د (ـ٢،٣)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب جـ د معين

---

١٢) اثبت باستخدام الميل أن المثلث الذى رؤوسه أ (١،٤) ، ب (ـ١،ـ٢) ، جـ (٢،ـ٣) قائم الزاوية في ب

---

١٣) إذا كانت أ (١ ، ٠) ، ب (ـ١ ، ٤) ، جـ (٧،٨) ، د (٩،٤) فاثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

---

١٤) أ ب جـ د شكل رباعى حيث :

أ (٢،٤) ، ب (ـ٣،٤) ، جـ (ـ٣،ـ١) ، د (٢،ـ١)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب جـ د مربع

معادلة الخط المستقيم

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية: ① الميل ② طول الجزء المقطوع من محور الصادات

وتكون المعادلة على الصورة:

$$ص = م\ س + جـ$$

مثال١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من محور الصادات جزءا **موجبا** طوله ٥ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = ٣ ، جـ = ٥

المعادلة هي: ص = ٣ س + ٥

مثال٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٣}$ ويقطع من محور الصادات جزءا **سالبا** طوله ٣ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{-١}{٣}$ ، جـ = – ٣

المعادلة هي: ص = $\frac{-١}{٣}$ س – ٣

ملحوظة عند حساب قيمة جـ

لحساب الجزء المقطوع لازم يكون معاك: ① ميل المستقيم المطلوب معادلته

② زوج مرتب يمر به المستقيم المطلوب معادلته (خد منه قيمة س ، ص)

مثال١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٥}$ ويمر النقطة (٥ ، ٣)

الحل

ص = م س + جـ ، م = $\frac{١}{٥}$

من الزوج (٥،٣) نعوض عن س = ٥ ، ص = ٣

٣ = ٥ × $\frac{١}{٥}$ + جـ

٣ = ١ + جـ ← جـ = ٢

المعادلة هي: ص = $\frac{١}{٥}$ س + ٢

مثال٢ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٦)

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٦ - ٣}{١ - ٢} = \frac{٣}{-١} = -٣$

من الزوج (٢،٣) نأخذ س = ٢ ، ص = ٣

٣ = -٣ × ٢ + جـ

٣ = -٦ + جـ ← جـ = ٩

المعادلة هي: ص = -٣ س + ٩

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١،٣) ،(-١،-٣)
ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

الحل

ص = م س + جـ

$\text{م} = \frac{-٣ - ٣}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

من (١،٣) بالتعويض عن : س = ١ ، ص = ٣ ، م = ٣

٣ = ٣ × ١ + جـ   ٣ = ٣ + جـ

جـ = ٠

∴ المعادلة هى : ص = ٣س

لإثبات أنه يمر بنقطة الأصل نعوض عن س = ٠

∴ ص = ٣×٠ = ٠   ∴ يمر بنقطة الأصل

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢
ويمر بالنقطة (١ ، ٠)

الحل

ص = م س + جـ

من الزوج المرتب (١،٠)

نعوض عن س = ١ ، ص = ٠

٠ = ٢ × ١ + جـ

٠ = ٢ + جـ

∴ جـ = -٢

∴ المعادلة هى: ص = ٢س – ٢

مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة
(٣،-٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠

الحل

ص = م س + جـ

$\text{م}_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢}$

المستقيمان متوازيان $\text{م}_١ = \frac{-١}{٢}$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = -٥ ، $\text{م} = \frac{-١}{٢}$

$-٥ = \frac{-١}{٢} \times ٣ + \text{جـ}$ $-٥ = \frac{-٣}{٢} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -٥ + \frac{٣}{٢} = \frac{-٧}{٢}$

∴ المعادلة هى: $\text{ص} = \frac{-١}{٢}\text{س} + \frac{-٧}{٢}$

مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٤)
وعمودى على المستقيم ٥س – ٢ص + ٧ = ٠

الحل

ص = م س + جـ

$\text{م}_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٥}{-٢} = \frac{٥}{٢}$

∵ المستقيمان متعامدان   ∴ $\text{م}_١ = -\frac{٢}{٥}$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = ٤ ، $\text{م} = -\frac{٢}{٥}$

$٤ = -\frac{٢}{٥} \times ٣ + \text{جـ}$ $٤ = -\frac{٦}{٥} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٤ + \frac{٦}{٥} = \frac{٢٦}{٥}$

∴ المعادلة هى: $\text{ص} = -\frac{٢}{٥}\text{س} + \frac{٢٦}{٥}$

إعداد أ/ محمود عوض حسن

مثال ٧ مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع من محور الصادات جزءا طوله وحدتان أوجد :

١) معادلة المستقيم ٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = ٢

∴ المعادلة هي: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

نعوض في المعادلة عن ص = ٠

٠ = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

$\frac{١}{٢}$ س = ـ ٢

س = ـ٢×٢ = ـ٤

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (ـ٤،٠)

مثال ٨ أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله ٥ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = ظا هـ

= ظا ١٣٥ = ـ١

حسبناها باستخدام الآلة الحاسبة

جـ = ٥

معادلة المستقيم هي:

ص = ـ س + ٥

مثال ٩ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١،٢) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ـ٣) ، ب (٥ ، ـ٤)

الحل

ميل أ ب = $\frac{-٤ - -٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١$ = ٣

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١،٢)

بالتعويض عن س = ١ ، ص = ٢ ، م = ٣

ص = م س + جـ

٢ = ٣ × ١ + جـ

جـ = ٢ ـ ٣ = ـ١

∴ المعادلة هى: ص = ٣س ـ ١

مثال ١٠ أوجد معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أ ب}$ من نقطة منتصفها حيث أ(١،٣) ، ب (٣،٥)

الحل

$م_٢$ = $\frac{٥ - ٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١$ = ـ١

منتصف أ ب = ($\frac{١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{٣ + ٥}{٢}$) = (٢،٤)

∵المستقيم يمر بالنقطة (٢،٤) نأخذ س=٢ ، ص=٤

ص= م س + جـ

٤ = ـ١ × ٢ + جـ ٤= ـ٢+ جـ

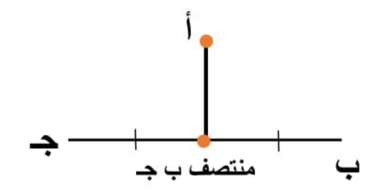
جـ = ٦

∴ المعادلة هى: ص = ـ س + ٦

مثال ١١

إذا كانت أ (-٣،٤) ، ب (٥،-١) ، جـ (٣،٥) فأوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل



منتصف ب جـ = $\left(\frac{٥ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٥}{٢}\right) = (٤،٢)$

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣،٤)
وبمنتصف ب جـ (٤،٢)

∴ م = $\frac{٢ - ٤}{٤ - -٣} = \frac{-٢}{٧}$

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٤،٢)

∴ نعوض عن س = ٤ ، ص = ٢

٢ = $\frac{-٢}{٧}$ × ٤ + جـ

٢ = $\frac{-٨}{٧}$ + جـ

جـ = ٢ + $\frac{٨}{٧}$

∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

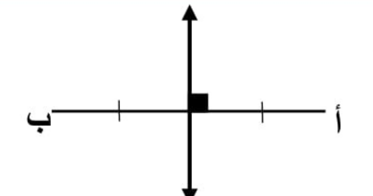
∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$

مثال ١٢

إذا كانت أ (-٢،٣) ، ب (٠،٥)

فأوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$

الحل



محور تماثل القطعة المستقيمة
هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - ٣}{٠ - -٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

∵ محور التماثل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ميل محور التماثل = -١

<u>لحساب قيمة جـ :</u>

∵ محور التماثل يمر بنقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

منتصف أ ب = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

= $\left(\frac{-٢ + ٠}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}\right) = (-١ ، ٤)$

∴ محور التماثل يمر بالنقطة (-١ ، ٤)

بالتعويض في المعادلة ص = م س + جـ

٤ = -١ × -١ + جـ

٤ = ١ + جـ ، جـ = ٣

معادلة محور التماثل هي : ص = - س + ٣

مثال ١٣

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ٤ ، ٩

الحل

ص = م س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٤،٠) ، (٠،٩)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٩ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{٩}{-٤} = -\frac{٩}{٤}$

∵ جـ = ٩

∴ المعادلة هى: ص= - $\frac{٩}{٤}$ س +٩

مثال ١٤

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ميل المستقيم $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءا سالبا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات

الحل

نظبط شكل المعادلة $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٣ص - ٣ = س ⟵ ٣ص - س - ٣ = ٠

م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$ ، جـ = -٣

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{١}{٣}$ س - ٣

مثال ١٥ — في الشكل المقابل :

النقطة جـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$

أوجد :

١) إحداثي كل من أ ، ب

٢) معادلة $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

∵ أ تقع على محور السينات ∴ أ = (س ، ٠)

∵ ب تقع على محور الصادات ∴ ب = (٠ ، ص)

منتصف أ ب = ($\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}$ ، $\frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}$)

(٣ ، ٤) = ($\frac{س + ٠}{٢}$ ، $\frac{ص + ٠}{٢}$)

$\frac{س}{٢}$ = ٣ | $\frac{ص}{٢}$ = ٤

س = ٦ | ص = ٨

∴ أ = (٦ ، ٠) | ∴ ب = (٠ ، ٨)

معادلة أ ب : ص = م س + جـ

ميل أ ب = $\frac{٨ - ٠}{٠ - ٦}$ = $\frac{٨}{-٦}$ = $-\frac{٤}{٣}$ ، جـ = ٨

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٨

مثال ١٦ — في الشكل المقابل :

ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

حيث و نقط الأصل

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أو}$

الحل

∵ ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

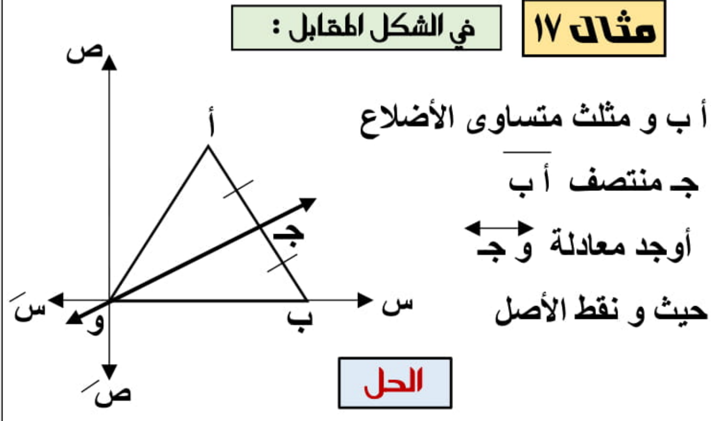
وهى الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ الميل م = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

∵ $\overleftrightarrow{أو}$ يمر بنقطة الأصل و ∴ جـ = صفر

ص = م س + جـ ∴ المعادلة: ص = $\sqrt{٣}$ س

مثال ١٧ — في الشكل المقابل :



أ ب و مثلث متساوى الأضلاع

جـ منتصف $\overline{أب}$

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{وجـ}$

حيث و نقط الأصل

الحل

∵ أ و ب △ متساوى الأضلاع

∴ ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

∵ جـ منتصف أ ب (أي أن $\overleftarrow{وجـ}$ متوسط في المثلث)

∴ $\overleftarrow{وجـ}$ ينصف أ و̂ ب

∴ ق (جـ و̂ ب) = ٣٠°

وهى الزاوية التي يصنعها $\overleftrightarrow{وجـ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

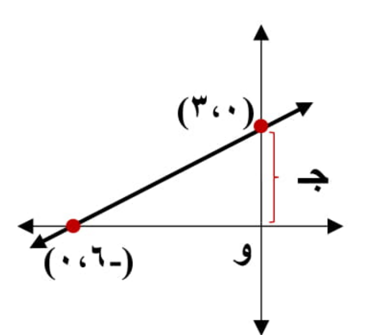
∴ الميل = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ $\overleftrightarrow{جـو}$ يمر بنقطة الأصل و ∴ جـ = صفر

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هى ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س

مثال ١٨ — في الشكل المقابل :



باستخدام الشكل المقابل

أكمل ما يأتي:

١) طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ...

٢) طول الجزء المقطوع من محور السينات = ...

٣) ميل الخط المستقيم م = ...

٤) معادلة الخط المستقيم هي ....

حساب طول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كانت المعادلة على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن:

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{\text{ـ الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$

إذا كانت المعادلة على الصورة

ص = أ س + جـ فإن:

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$

ولكن في الحالتين يكون **طول** الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$

مثال ١ أوجد الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم ٢ص= ٣س + ١٢

الحل

نظبط المعادلة فتكون:

٢ص ـ ٣س ـ ١٢ = ٠

الميل م = $\frac{\text{ـ معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٢}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{\text{ـ الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$

= $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

مثال ٢ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

لاحظ أن : معامل س = $\frac{١}{٢}$ ، معامل ص = $\frac{١}{٣}$

الميل م = $\frac{\text{ـ معامل س}}{\text{معامل ص}} = ـ \frac{١}{٢} \div \frac{١}{٣}$

= $ـ \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١} = \frac{٣ـ}{٢}$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات= $\left|\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$

= ١ ÷ $\frac{١}{٣}$ = ٣

ملاحظات على معادلة الخط المستقيم

١) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : ص = ب

<u>مثال</u>: المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢، ٥) معادلته هي : ص = ٥

٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : س = أ

<u>مثال</u>: المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٣، ٤) معادلته هي : س = ٣

٣) إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل فإن الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = صفر

معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هى : ص = ٣س

معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هى : ص = س

٤) معادلة محور السينات هي ص = صفر ، معادلة محور الصادات هي س = صفر

١ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازى المستقيم الذى معادلته ص = ٣س + ٥

الحل

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (١ ، ـ١)

الحل

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣،ـ٥) عموديا على المستقيم س + ٢ص ـ ٧ = ٠

الحل

٤ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته ٤س + ٥ص ـ ١٠ = ٠

الحل

أسئلة اختر على معادلة المستقيم

١) الخط المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢ س + ٦ يقطع جزءا من محور الصادات طوله = ... وحدة طول

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢) المستقيم الذى معادلته ٢ س – ٣ ص – ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) -٦ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{٣}$

٣) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،-٥) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٥ (جـ) ص = ٢ (د) س = -٥

٤) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،-٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٥ (جـ) ص = ٢ (د) س = -٥

٥) معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) س =٣ (ب) ص =٣ (جـ) ص =٣س (د) ص = -٣س

٦) معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) س = ١ (ب) ص = ١ (جـ) ص = ٠ (د) ص = س

٧) الخط المستقيم ص – ٢ س – ٥ = ٠ يقطع من المحور الصادى جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٠

٨) المستقيم الذى معادلته س + ٢ص – ٧ = ٠ يقطع من محور السينات جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ٣

٩) مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات ٣س – ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوى .... وحدة طول مربعة

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ١٢

١٠) في الشكل المقابل:

إذا كان أ و = ٨ وحدات طول ، ب و = ٦ وحدات طول

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

(أ) ص = $\frac{٤}{٣}$ س + ٨ (ب) ص = $-\frac{٤}{٣}$ س – ٨

(جـ) ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ٨ (د) ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٨

تمارين على معادلة الخط المستقيم

١) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءا طوله ٧ وحدات

---

٢) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بالنقطة (٥ ، ٠)

---

٣) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)

---

٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (ـ٢ ، ـ١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

---

٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٥) عموديا على المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٢}$

---

٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى المستقيم ٢س ـ ٣ص + ٦ = ٠

---

٧) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢، ـ٥) عموديا على المستقيم الذى معادلته ص ـ ٢س +٧ = ٠

---

٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢،ـ٥) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (ـ٢،١) ، (٢،٧)

---

٩) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم ٢س ـ ٣ص = ٦

١٠) إذا كانت أ (٣ ، ـ١) ، ب (٥ ، ٣) فأوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أب}}$

---

١١) أوجد معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة منتصفها حيث أ (٢،١) ، ب (٤،٥)

---

١٢) إذا كانت أ (٥،ـ٦) ، ب (٣،٧) ، جـ (١،ـ٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ وبمنتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

---

١٣) أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته:

٢س = ٣ص + ٦

---

١٤) أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته:

٢س ـ ٦ص = ١٢

ثم أوجد نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات

---

١٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب

---

١٦) في الشكل المقابل:

جـ (١،٢) منتصف أ ب

فأوجد:

١) إحداثى أ ، ب
٢) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
٣) مساحة المثلث و أ ب

ص
ب
(١، ٢)
جـ
سَ
س
أ
صَ

١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) صفر

٢) المثلث أ ب جـ فيه أ ب $>$ أ جـ فإن ق ($\hat{ب}$) .... ق ($\hat{جـ}$)

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) = (د) ≥

٣) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٤٥

٤) محيط الدائرة = ...

(أ) π نق (ب) π نق^2 (جـ) ٢ π نق (د) ٤ π نق

٥) Δ أ ب جـ المتساوى الساقين إذا كان إحدى زوايا القاعدة = ٣٠° فإن قياس زاوية الرأس = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٧٥ (د) ٣٠

٦) أ ب جـ د متوازى أضلاع ن فإذا كان ق ($\hat{أ}$) = ٤٠° فإن ق ($\hat{ب}$) = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٤٠

٧) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة .... من جهة الرأس

(أ) ١ : ١ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

٨) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٢ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

٩) مساحة المربع الذى محيطه ١٦ سم = ... سم^2

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٥٦

١٠) مجموع طولى أي ضلعين في مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) يساوى (جـ) أكبر من (د) ضعف

١١) في الشكل المقابل :

٦٠

ع سم

س سم

ص

(أ) س +ص =ع (ب) ع = س^2 + ص^2 (جـ) ٢س = ع (د) ص = ٢ ع

١٢) أسطوانة دائرية قائمة إذا كان ارتفاعها = طول نصف قطر قاعدتها نق فإن حجمها = ... سم^3

(أ) π نق^3 (ب) ٢ π نق^2 (جـ) ٢ π نق^3 (د) $\frac{٤}{٣}$ π نق^3